Université d'Angers – 2022/2023

Fondements d'Analyse

Période 4

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$
2. $y' + y = 2\sin(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}.$
3. $y' + y = (x+1)e^x \quad \text{sur } \mathbb{R}.$
4. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1 \quad \text{sur }]0,+\infty[.$
5. $y' + y = \frac{1}{1+e^x} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$
6. $y' - \frac{1}{x}y = x^2 \quad \text{sur }]0,+\infty[.$

Exercice 2.

1. Déterminer l'unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 3$ de l'équation différentielle
$$(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1.$$
2. Déterminer l'unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $y(0) = 1$ de l'équation différentielle
$$y' + \tan(x)y = \sin(2x).$$
3. Déterminer l'unique solution sur $]0,\pi[$ vérifiant $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ de l'équation différentielle
$$\sin(x)y' - \cos(x)y = -1.$$

Exercice 3.
Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $xy' - 2y = x^3$
2. $x^2y' - y = 0$
3. $xy' + y = 1$
4. $xy' - y = x$

Exercice 4.
Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert quelconque (i.e. l'ensemble des solutions peut dépendre de I).

1. $x(1+x^2)y' - y = 0$
2. $xy' - 2y = x^4$
3. $x^2y' + y = 1$
4. $(1-x)y' - y = x$
5. $x(x-1)y' - (3x-1)y = -x^2(x+1)$
   Indice : pour cette dernière question, on pourra remarquer que $\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ *pour* $a, b \in \mathbb{R}$ *convenablement choisis et chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.*

Exercice 5.
Trouver une équation différentielle dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 7.
Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire.
Montrer que l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x)$$

admet une unique solution impaire.
Indice : une solution impaire vérifie forcément une certaine condition initiale.

Exercice 8.
On considère l'équation différentielle

$$y' - (x+1)y = e^x.$$

1. Justifier que l'équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = -1$.
2. On considère l'unique solution vérifiant $y(0) = -1$. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x)+1}{x^\alpha}$$

   selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Indice : il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation pour répondre à cette question…

2 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Exercice 9.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 9y = x + 1$
2. $y'' - 2y' + y = \sin(2x)$
3. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$
4. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{x}$
5. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$
6. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos(x)$

Exercice 10.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
2. $y'' + 2y' + 4y = xe^x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.
3. $y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$.

Exercice 11.
Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable proposé.

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ en posant $t = e^x$.
2. $x^2y'' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en posant $t = \ln(x)$.
3. $y'' + \tan(x)y' - \cos^2(x)y = 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en posant $t = \sin(x)$.

Exercice 12.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = xe^x.$$

Indice : on pourra changer d'inconnue en posant $z(x) = (1 + e^x)y(x)$.

Exercice 13.
Trouver une équation différentielle dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3 Applications

Exercice 14.
L’accroissement de la population P d’un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 15.
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1, \\ f(0) = -4. \end{cases}$$

Exercice 16.
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall s, t \in \mathbb{R},\ f(s+t) = f(s)f(t).$$

Indice : on pourra dériver la relation par rapport à s.

Exercice 17.
On cherche à déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x.$$

1. Montrer qu’une telle fonction f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Montrer qu’une telle fonction f vérifie une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants.
3. Déterminer les fonctions f vérifiant les conditions de l’énoncé.

Les exercices indiqués avec l’icône ne sont pas exigibles à l’examen.