

# Fondements d'Analyse

Examen du 5 avril 2023.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction.

## Exercice 1.

Résoudre l'équation différentielle suivante sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' - 7y' + 10y = 0$$

## Exercice 2.

Résoudre l'équation différentielle suivante sur  $\mathbb{R}$  :

$$4y'' - 4y' + y = 24xe^{\frac{x}{2}}$$

## Exercice 3.

Résoudre l'équation différentielle suivante sur  $\mathbb{R}$  à l'aide du changement de variable  $t = \arctan(x)$  :

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + 9y = 0.$$

## Exercice 4.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) (1 + x^2)y' - xy = 0.$$

1. Donner la solution générale de (E) sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer l'unique solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $y(0) = 42$ .

## Exercice 5.

Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  où  $I$  est un intervalle ouvert quelconque :

$$xy' + 2y = x^2 + x$$

*Remarque : l'ensemble des solutions peut dépendre de l'intervalle  $I$ .*

## Exercice 6.

On considère la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = 6t^2 e^t \\ y(t) = t^2 + t^3 + t^4 \end{cases}$$

1. Montrer que la courbe paramétrée admet un point stationnaire en  $t_0 = 0$ .
2. Tracer l'allure de la courbe au voisinage de  $t_0 = 0$ , en précisant la nature de ce point stationnaire.

## Exercice 7.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $f_1(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$ .
2. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de  $f_2(x) = (\ln(1+x))^3$ .
3. Donner le développement limité en 1 à l'ordre 4 de  $f_3(x) = e^{2x}$ .