

Université d'Angers – 2022/2023
Fondements d'Analyse
Examen du 6 février 2023.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f_1(x) = \cos(x) - \ln(1+x)$.
2. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f_2(x) = \frac{e^x}{1-x}$.
3. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f_3(x) = e^{\cos(x+x^2)}$.
4. Donner le développement limité en 2 à l'ordre 3 de $f_4(x) = \ln(x)$.
5. Donner le développement limité en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 3 de $f_5(x) = \frac{1}{\sin(x)}$.
6. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $f_6(x) = (\sin(x))^3$.

Exercice 2.

1. Énoncer le théorème de Taylor–Young.
On prendra soin de rappeler précisément les hypothèses et la conclusion.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{1+x^6}$.
A l'aide du théorème de Taylor–Young, calculer la dérivée dixième $f^{(10)}(0)$ de f en 0.

Exercice 3.

Soit $f(x) = \ln(1+x) - \cos(x) + 2\sin(x)$.

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
2. Donner la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 4.

À l'aide de développements limités convenablement choisis, déterminer l'asymptote éventuelle en $+\infty$ et la position relative par rapport à cette asymptote de la courbe représentative de la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2+x^3}{x^3}\right) \sqrt{2+x^2}$$