Suite à la nuit européenne des chercheurs

3 octobre 2022

Promesse n°1 : la somme des angles des triangles vaut π

La Proposition 32 du Livre I des éléments d'Euclide (vers 300 av. J.-C.) énonce que *la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits*.

[1] C'est d'ailleurs la première proposition des éléments qui repose sur ce postulat.
[2] Cette version du cinquième postulat est généralement nommée *axiome de Playfair.*

Promesse n°1 : la somme des angles des triangles vaut π

La Proposition 32 du Livre I des éléments d'Euclide (vers 300 av. J.-C.) énonce que *la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits*.

Elle est accompagnée d'une démonstration qui repose sur la Proposition 29 du même livre, à savoir la propriété des angles alternes-internes.

[1] C'est d'ailleurs la première proposition des éléments qui repose sur ce postulat.
[2] Cette version du cinquième postulat est généralement nommée *axiome de Playfair.*

Promesse n°1 : la somme des angles des triangles vaut π

La Proposition 32 du Livre I des éléments d'Euclide (vers 300 av. J.-C.) énonce que *la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits*.

Elle est accompagnée d'une démonstration qui repose sur la Proposition 29 du même livre, à savoir la propriété des angles alternes-internes.
Cette dernière est une conséquence du cinquième postulat d'Euclide[1], qui admet comme énoncé équivalent[2] : *par un point, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée*.

[1] C'est d'ailleurs la première proposition des éléments qui repose sur ce postulat.
[2] Cette version du cinquième postulat est généralement nommée *axiome de Playfair.*

Promesse n°1 : la somme des angles des triangles vaut π

La Proposition 32 du Livre I des éléments d'Euclide (vers 300 av. J.-C.) énonce que *la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits*.

Elle est accompagnée d'une démonstration qui repose sur la Proposition 29 du même livre, à savoir la propriété des angles alternes-internes.
Cette dernière est une conséquence du cinquième postulat d'Euclide[1], qui admet comme énoncé équivalent[2] : *par un point, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée*.

En fait, on peut montrer que la propriété de la somme des angles d'un triangle est équivalente au cinquième postulat :

Théorème de Legendre

S'il existe un triangle dont la somme des angles est égale à deux angles droits alors cette somme est la même pour tous les triangles, et le cinquième postulat d'Euclide est vrai.

Ils sont aussi équivalents au théorème de Pythagore....

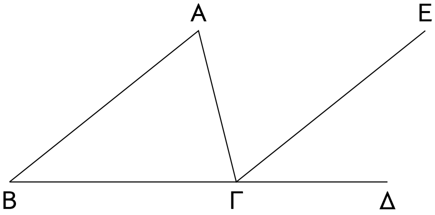
[1] C'est d'ailleurs la première proposition des éléments qui repose sur ce postulat.
[2] Cette version du cinquième postulat est généralement nommée *axiome de Playfair.*

Démonstration originale

λβ΄. Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.
Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.
Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.
Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

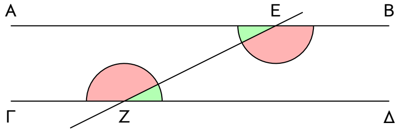
Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Propriété des angles alternes-internes en trichant un peu...

Proposition

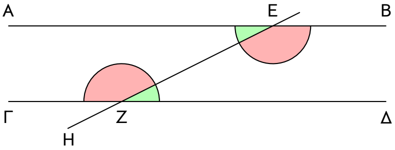
Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors elles forment des angles alternes-internes de même mesure.



Propriété des angles alternes-internes en trichant un peu…

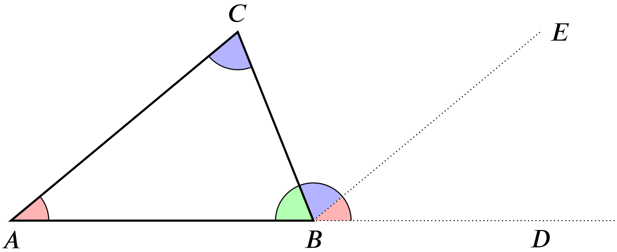
Proposition

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors elles forment des angles alternes-internes de même mesure.



Démonstration.
Supposons par l'absurde que $\measuredangle \mathrm{BEZ} > \measuredangle \Gamma \mathrm{ZE}$.
Alors $\measuredangle \mathrm{BEZ} + \measuredangle \mathrm{EZ}\Delta = \measuredangle \mathrm{BEZ} + \pi - \measuredangle \Gamma \mathrm{ZE} > \pi$.
et $\pi = \measuredangle \mathrm{EZH} = \measuredangle \mathrm{EZ}\Delta + \measuredangle \Delta \mathrm{ZH} = \measuredangle \mathrm{EZ}\Delta + \measuredangle \mathrm{BEZ} > \pi$.
D'où une contradiction.
Donc $\measuredangle \mathrm{BEZ} \leq \measuredangle \Gamma \mathrm{ZE}$ et on montre l'autre inégalité de façon similaire.
Ainsi $\measuredangle \mathrm{BEZ} = \measuredangle \Gamma \mathrm{ZE}$ et $\measuredangle \mathrm{AEZ} = \measuredangle \mathrm{EZ}\Delta$. ∎

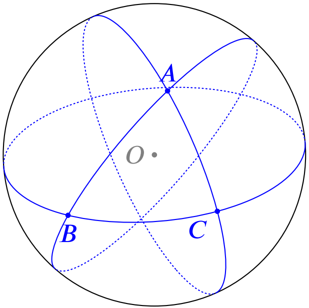
La somme des angles d'un triangle vaut π : une démonstration

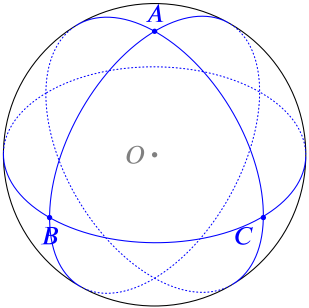


Soit un triangle ABC.
On place D sur $[AB) \setminus [AB]$.
On place E sur la droite parallèle à (AC) passant par B du même côté que le triangle.
On a $\measuredangle ACB = \measuredangle CBE$ par la propriété des angles alternes-internes (où (BC) est sécante aux droites parallèles (AC) et (BE)).
De plus $\measuredangle CAB = \measuredangle EBD$.
Donc $\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle CAB = \measuredangle ABC + \measuredangle CBE + \measuredangle EBD = \pi$. ∎

Et sur une sphère ?

- Étant donnés une droite et un point extérieur à cette droite, il n'existe aucune droite parallèle à cette droite passant par ce point ;
- La somme des angles d'un triangle est toujours strictement supérieure à π.





Un triangle avec trois angles droits…

Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

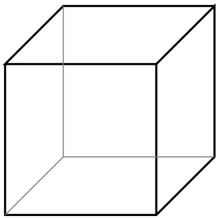
Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :



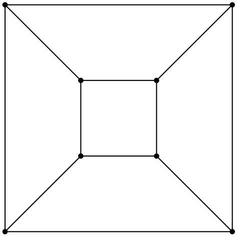
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.



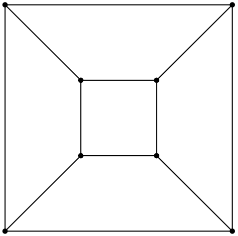
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.



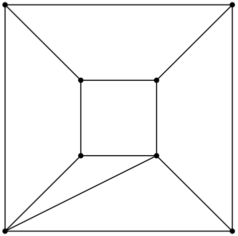
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.



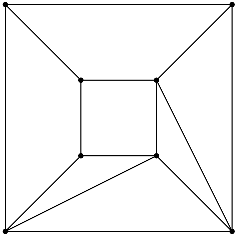
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets − #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.



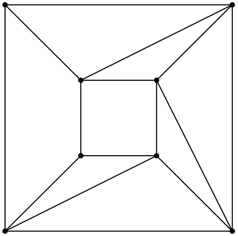
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.



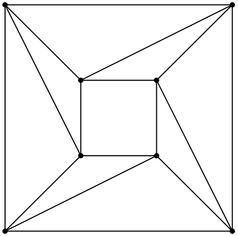
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.



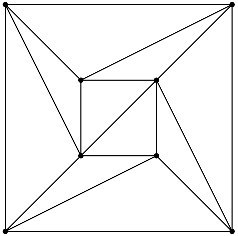
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.



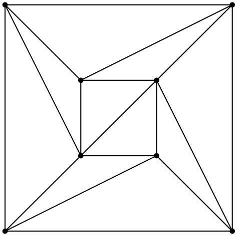
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.



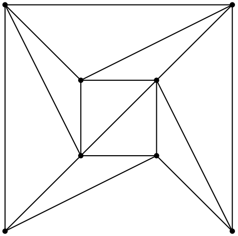
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.



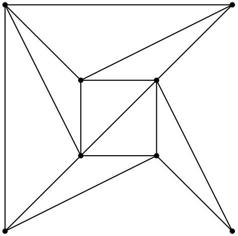
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.



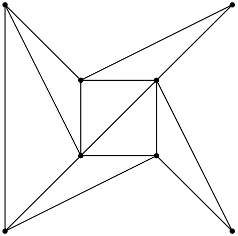
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets − #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.



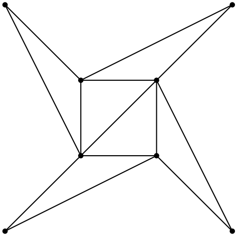
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets − #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.

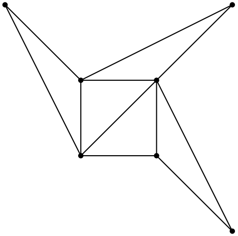


Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets − #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.



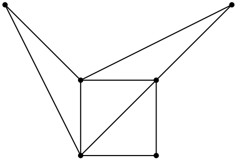
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.



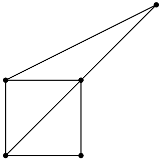
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets − #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.



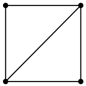
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets − #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.



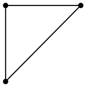
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets − #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.



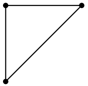
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets − #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- Il ne reste qu'un triangle donc $S - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$.



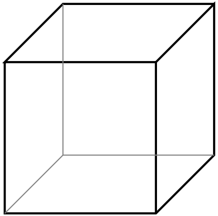
Promesse n°2 : relation d'Euler

Proposition

Dans tout polyèdre convexe, on a #Sommets – #Arêtes + #Faces $= 2$.

Démonstration de Cauchy en 1811 :

- On enlève une face de sorte à obtenir un graphe planaire.
- On triangule le graphe : à chaque étape, le nombre de faces et le nombre d'arêtes augmentent de 1 donc la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- On répète le processus suivant :
  - Soit on enlève une arête extérieure et donc le nombre de faces et le nombre d'arêtes diminuent de 1 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
  - Soit on enlève un triangle extérieur et donc le nombre de faces et le nombre de sommets diminuent de 1 alors que le nombre d'arêtes diminuent de 2 : la quantité $S - A + F$ est inchangée.
- Il ne reste qu'un triangle donc $S - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$.
- Il faut rajouter la face enlevée initialement et ainsi $S - A + F = 2$. ■



$8 - 12 + 6 = 2$