Analyse Élémentaire

Qu'est-ce qu'une limite ?

26 septembre 2022

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, signifie que

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Mises en garde :

- Il existe deux définitions qui diffèrent lorsque $a \in D$:

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Mises en garde :

- Il existe deux définitions qui diffèrent lorsque $a \in D$:
    - *Limite épointée :* on ne tient pas compte de $f(a)$.
      Cette définition est plus naturelle mais la règle de composition est fausse.

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Mises en garde :

- Il existe deux définitions qui diffèrent lorsque $a \in D$:
  - *Limite épointée :* on ne tient pas compte de $f(a)$.
    Cette définition est plus naturelle mais la règle de composition est fausse.
  - *Limite non-épointée :* on tient compte de $f(a)$.
    Cette définition rend la règle de composition vraie mais elle n'existe pas hors de France.
    De plus les limites à droite et à gauche peuvent coïncider sans que la limite existe.

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Mises en garde :

- Il existe deux définitions qui diffèrent lorsque $a \in D$:
  - *Limite épointée :* on ne tient pas compte de $f(a)$.
    Cette définition est plus naturelle mais la règle de composition est fausse.
  - *Limite non-épointée :* on tient compte de $f(a)$.
    Cette définition rend la règle de composition vraie mais elle n'existe pas hors de France.
    De plus les limites à droite et à gauche peuvent coïncider sans que la limite existe.

Puisque la définition retenue dans la plupart des concours en France est la limite non-épointée, c'est celle utilisée ici. *Sans plus de conviction...*

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Mises en garde :

- Il existe deux définitions qui diffèrent lorsque $a \in D$.
- Pour que la notion de *limite en* a ait du sens, il faut que a soit "infiniment proche de D" :

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Mises en garde :

- Il existe deux définitions qui diffèrent lorsque $a \in D$
- Pour que la notion de *limite en* a ait du sens, il faut que a soit "infiniment proche de D" :
  - Si $a \in \mathbb{R}$: on supposera que
    - soit D contient a,
    - soit D est un intervalle dont a est un bord,
    - soit $D = I \setminus \{a\}$ où I est un intervalle contenant a non-réduit à un point.

    Plus généralement, il faut que a soit adhérent à D, notion qui n'est pas au programme.

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Mises en garde :

- Il existe deux définitions qui diffèrent lorsque $a \in D$
- Pour que la notion de *limite en* a ait du sens, il faut que a soit "infiniment proche de D" :
  - Si $a \in \mathbb{R}$: on supposera que
    - soit D contient a,
    - soit D est un intervalle dont a est un bord,
    - soit $D = I \setminus \{a\}$ où I est un intervalle contenant a non-réduit à un point.

    Plus généralement, il faut que a soit adhérent à D, notion qui n'est pas au programme.
  - Si $a = +\infty$, il faut que D ne soit pas majoré (en pratique $D = [b, +\infty[$ ou $D =]b, +\infty[$).
  - Si $a = -\infty$, il faut que D ne soit pas minoré (en pratique $D =]-\infty, b]$ ou $D =]-\infty, b[$).

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Mises en garde :

- Il existe deux définitions qui diffèrent lorsque $a \in D$
- Pour que la notion de *limite en* a ait du sens, il faut que a soit "infiniment proche de D" :
  - Si $a \in \mathbb{R}$: on supposera que
    - soit D contient a,
    - soit D est un intervalle dont a est un bord,
    - soit $D = I \setminus \{a\}$ où I est un intervalle contenant a non-réduit à un point.

    Plus généralement, il faut que a soit adhérent à D, notion qui n'est pas au programme.
  - Si $a = +\infty$, il faut que D ne soit pas majoré (en pratique $D = [b, +\infty[$ ou $D =]b, +\infty[$).
  - Si $a = -\infty$, il faut que D ne soit pas minoré (en pratique $D =]-\infty, b]$ ou $D =]-\infty, b[$).

Ces conditions sont implicites dans la suite !

Définition intuitive

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

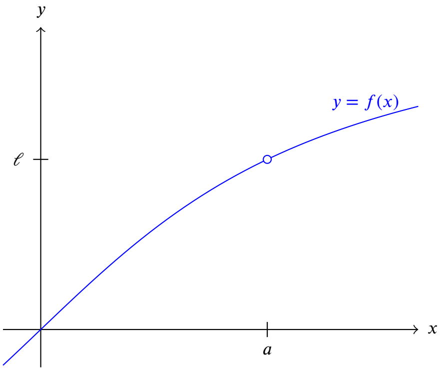
Dire que f admet ℓ comme limite en a, noté $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a.

Mises en garde :

- Il existe deux définitions qui diffèrent lorsque $a \in D$
- Pour que la notion de *limite en* a ait du sens, il faut que a soit ”infiniment proche de D”.

Limite finie en un point : $a, \ell \in \mathbb{R}$

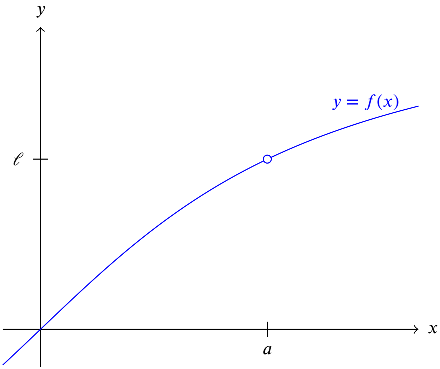
$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ signifie que



Limite finie en un point : $a, \ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ signifie que

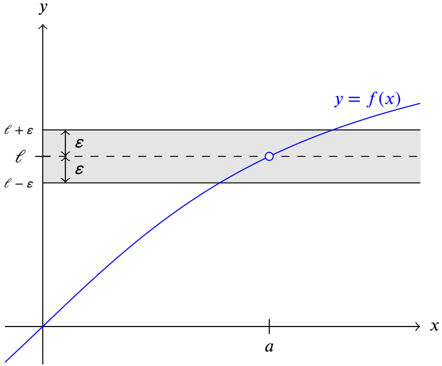
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Limite finie en un point : $a, \ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ signifie que

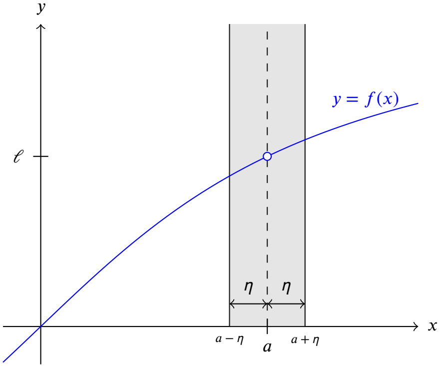
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Limite finie en un point : $a, \ell \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ signifie que

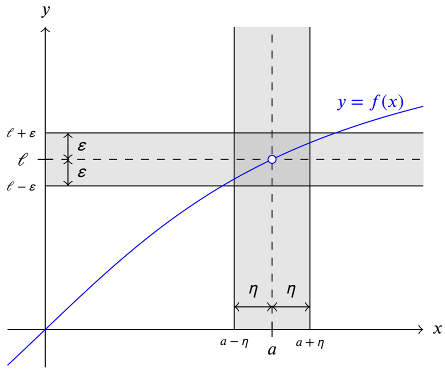
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Limite finie en un point : $a, \ell \in \mathbb{R}$

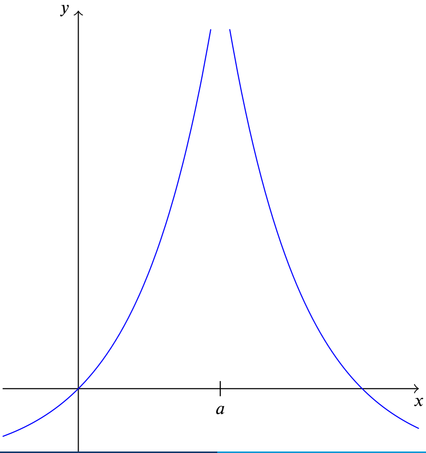
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ signifie que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Limite $+\infty$ en un point : $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$

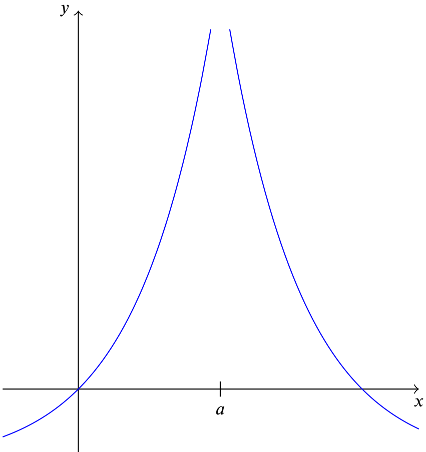
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie que



Limite $+\infty$ en un point : $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie que

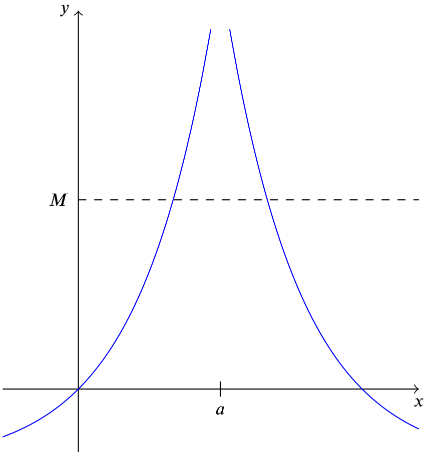
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M.$$



Limite $+\infty$ en un point : $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie que

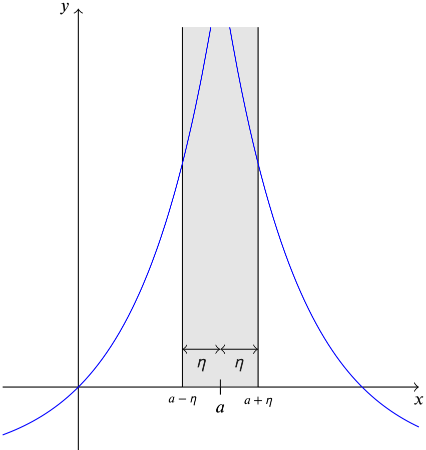
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M.$$



Limite $+\infty$ en un point : $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie que

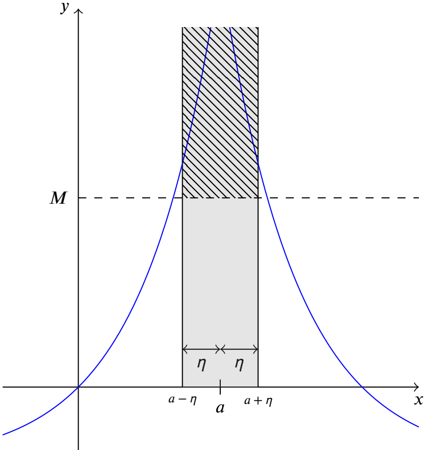
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M.$$



Limite $+\infty$ en un point : $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$

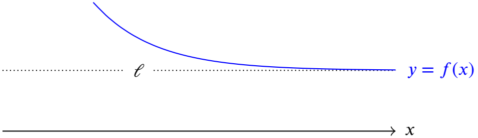
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie que

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M.$$



Limite finie en $+\infty$: $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

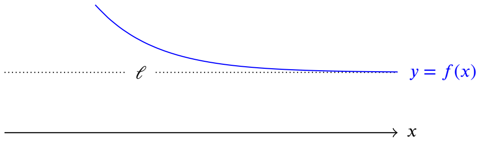
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie que



Limite finie en $+\infty$: $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie que

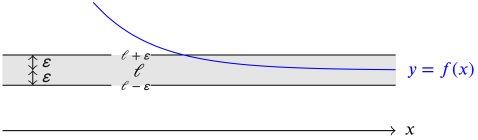
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \geq N \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Limite finie en $+\infty$: $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ signifie que

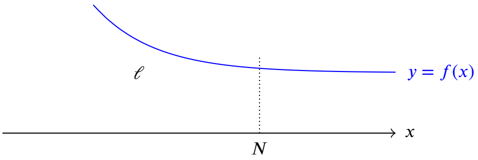
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \geq N \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Limite finie en $+\infty$: $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie que

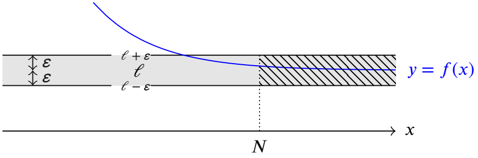
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq N \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Limite finie en $+\infty$: $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \geq N \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Et les autres…

- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ signifie que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies f(x) \geq M$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ signifie que $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies f(x) \leq M$.
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ signifie que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \geq N \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$.
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \geq N \implies f(x) \geq M$.
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \geq N \implies f(x) \leq M$.
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ signifie que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \leq N \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$.
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \leq N \implies f(x) \geq M$.
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ x \leq N \implies f(x) \leq M$.

Unicité de la limite

Dans les définitions précédentes, si la limite existe alors elle est unique.

Unicité de la limite

Dans les définitions précédentes, si la limite existe alors elle est unique.

Démonstration.

Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \tilde{\ell}$ où $\ell, \tilde{\ell} \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - \tilde{\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit[a] $x \in D$ tel que $|x-a| \leq \min(\eta_1, \eta_2)$. Alors,

$$|\ell - \tilde{\ell}| = |\ell - f(x) + f(x) - \tilde{\ell}| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \tilde{\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc montré que $\forall \varepsilon > 0$, $|\ell - \tilde{\ell}| \leq \varepsilon$, d'où $\tilde{\ell} = \ell$. ■

[a] Un tel x existe puisque l'on a supposé a infiniment proche de D.

Unicité de la limite

Dans les définitions précédentes, si la limite existe alors elle est unique.

Démonstration.

Supposons par l'absurde que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| \le \eta_1 \implies |f(x)-\ell| \le 1.$$

Il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| \le \eta_2 \implies f(x) \ge \ell + 2.$$

Soit[a] $x \in D$ tel que $|x-a| \le \min(\eta_1, \eta_2)$.

Alors, $f(x) \le \ell + 1$ et $f(x) \ge \ell + 2$, d'où une contradiction. ∎

[a]Un tel x existe puisque l'on a supposé a infiniment proche de D.

Exemple 1

Montrons que $\lim_{x\to 1} x^3 + 2x = 3$.

Exemple 1

Montrons que $\lim_{x \to 1} x^3 + 2x = 3$.

Soit $\varepsilon > 0$.
Posons $\eta := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{9}\right)$.
Alors $\eta > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 1| \leq \eta$.
Alors $|x - 1| \leq 1$ d'où $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq x^2 \leq 4$. Ainsi

$$0 \leq x^2 + x + 3 \leq 9.$$

Puis

$$|x^3 + 2x - 3| = |(x-1)(x^2 + x + 3)| = |x - 1||x^2 + x + 3| \leq 9\eta \leq 9\frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon.$$

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - 1| \leq \eta \implies |(x^3 + 2x) - 3| \leq \varepsilon.$$

Exemple 2

Montrons qu'il n'existe pas de réel ℓ tel que $\lim_{x \to +\infty} \cos(\pi x) = \ell$.

[1] Il existe un tel n car $\mathbb{R}$ est archimédien, voir le cours d'Analyse Approfondie.

Exemple 2

Montrons qu'il n'existe pas de réel ℓ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\pi x) = \ell$.

En passant à la négation, on veut montrer que

$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x \geq N \text{ et } |\cos(\pi x) - \ell| > \varepsilon.$$

[1] Il existe un tel n car $\mathbb{R}$ est archimédien, voir le cours d'Analyse Approfondie.

Exemple 2

Montrons qu'il n'existe pas de réel ℓ tel que $\lim_{x\to+\infty} \cos(\pi x) = \ell$.
En passant à la négation, on veut montrer que

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq N \text{ et } |\cos(\pi x) - \ell| > \varepsilon.$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon := \frac{1}{2} > 0$.
Soit $N \in \mathbb{R}$. Soit[1] $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \frac{N}{2}$.
Alors

- Premier cas : $|1 - \ell| > \varepsilon$.
  Posons $x := 2n$, alors $x \geq N$ et $|\cos(\pi x) - \ell| = |1 - \ell| > \varepsilon$.
- Deuxième cas : $|1 - \ell| \leq \varepsilon$.
  Alors $-\frac{5}{2} = -2 - \varepsilon \leq -1 - \ell \leq -2 + \varepsilon = -\frac{3}{2}$ et donc $|-1 - \ell| \geq \frac{3}{2} > \varepsilon$.
  Posons $x := 2n + 1$, alors $x \geq N$ et $|\cos(\pi x) - \ell| = |-1 - \ell| > \varepsilon$.

[1] Il existe un tel n car $\mathbb{R}$ est archimédien, voir le cours d'Analyse Approfondie.

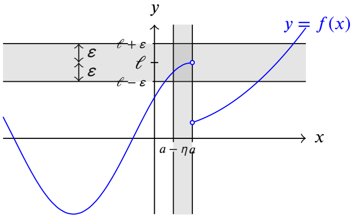
Définitions

f admet ℓ pour limite à gauche en a si la restriction $f_{|]-\infty,a[\cap D}$ tend vers ℓ en a, on note alors

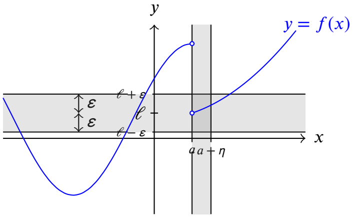
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) := \lim_{x\to a} f_{|]-\infty,a[\cap D} = \ell.$$

f admet ℓ pour limite à droite en a si la restriction $f_{|]a,+\infty[\cap D}$ tend vers ℓ en a, on note alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) := \lim_{x\to a} f_{|]a,+\infty[\cap D} = \ell.$$



$$\ell = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$



$$\ell = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

Limites à droite et à gauche en un point – 2

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a} f_{|]-\infty,a[\cap D}.$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a} f_{|]a,+\infty[\cap D}.$$

Par définition, les limites à droite et à gauche en a ne tiennent pas compte de la valeur de la fonction en a : l'intervalle est ouvert en a.

Ainsi

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ 0 < a - x \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon,$$

et

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ 0 < x - a \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Limites à droite et à gauche en un point – 3

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ où $D =]b, a[\cup]a, c[$ avec $b < a < c$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Démonstration pour $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ 0 < a - x \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
Il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ 0 < x - a \leq \eta_2 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1, \eta_2)$.
Soit $x \in D$ tel que $|x - a| \leq \eta$.

- Premier cas : $x < a$ alors $0 < a - x = |x - a| \leq \eta \leq \eta_1$ donc $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
- Deuxième cas : $x > a$ alors $0 < x - a = |x - a| \leq \eta \leq \eta_2$ donc $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
- Forcément $x \neq a$ puisque $a \notin D$.

On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. ■

Opérations sur les limites – 1

$\lim(f+g)$			
$\lim g$ \ $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell}$	$\ell + \tilde{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$\lim(f-g)$			
$\lim g$ \ $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell}$	$\ell - \tilde{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI

Opérations sur les limites – 2

$\lim(fg)$					
$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell} > 0$	$\ell\tilde{\ell}$	$\ell\tilde{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell} < 0$	$\ell\tilde{\ell}$	$\ell\tilde{\ell}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

$\lim(f/g)$					
$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell} > 0$	$\ell/\tilde{\ell}$	$\ell/\tilde{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\tilde{\ell} < 0$	$\ell/\tilde{\ell}$	$\ell/\tilde{\ell}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^-	0	FI	FI
$-\infty$	0^-	0^+	0	FI	FI

Opérations sur les limites – 3

Démontrons que si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \tilde{\ell}$ alors $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \ell + \tilde{\ell}$.

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \le \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \le \frac{\varepsilon}{2}$.
Il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \le \eta_2 \implies |g(x) - \tilde{\ell}| \le \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\eta := \min(\eta_1, \eta_2) > 0$.
Soit $x \in D$ tel que $|x-a| \le \eta$. Alors

$$|(f(x)+g(x)) - (\ell + \tilde{\ell})| = |(f(x)-\ell) + (g(x)-\tilde{\ell})| \le |f(x)-\ell| + |g(x)-\tilde{\ell}| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \le \eta \implies |(f(x)+g(x)) - (\ell + \tilde{\ell})| \le \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Opérations sur les limites – 4

Démontrons que si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \tilde{\ell}$ alors $\lim_{x\to +\infty} f(x)g(x) = \ell\tilde{\ell}$.

Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-\ell| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\tilde{\ell}|+1)}$.
Il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |g(x)-\tilde{\ell}| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}$.
Il existe $\eta_3 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_3 \implies |g(x)-\tilde{\ell}| \leq 1$.
Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3) > 0$. Soit $x \in D$ tel que $|x-a| \leq \eta$. Alors

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \ell\tilde{\ell}| &= |f(x)g(x) - \ell g(x) + \ell g(x) - \ell\tilde{\ell}| \\
&\leq |f(x)g(x) - \ell g(x)| + |\ell g(x) - \ell\tilde{\ell}| \\
&= |f(x)-\ell||g(x)| + |\ell||g(x)-\tilde{\ell}| \\
&= |f(x)-\ell||g(x)-\tilde{\ell}+\tilde{\ell}| + |\ell||g(x)-\tilde{\ell}| \\
&\leq |f(x)-\ell|\left(|g(x)-\tilde{\ell}| + |\tilde{\ell}|\right) + |\ell||g(x)-\tilde{\ell}| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(|\tilde{\ell}|+1)}(1+|\tilde{\ell}|) + |\ell|\frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)g(x) - \ell\tilde{\ell}| \leq \varepsilon$. ■

Opérations sur les limites – 5

Démontrons que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon \frac{|\ell|^2}{2}$.
Il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta_2 \implies |f(x)-\ell| \leq \frac{|\ell|}{2}$.
Remarquons d'abord que si $x \in D$ vérifie $|x-a| \leq \eta_2$ alors

$$|\ell| = |\ell - f(x) + f(x)| \leq |f(x)-\ell| + |f(x)| \leq \frac{|\ell|}{2} + |f(x)| \qquad \text{d'où} \qquad |f(x)| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0.$$

Ainsi f ne s'annule pas au voisinage de a et $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a.
Posons $\eta \coloneqq \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ et considérons $x \in D$ vérifiant $|x-a| \leq \eta$. Alors

$$\left|\frac{1}{f} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - f(x)}{\ell f(x)}\right| = \frac{1}{|\ell|} \cdot \frac{1}{|f(x)|} \cdot |\ell - f(x)| \leq \frac{1}{|\ell|} \cdot \frac{2}{|\ell|} \cdot \varepsilon \frac{|\ell|^2}{2} = \varepsilon.$$

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-a| \leq \eta \implies \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \varepsilon.$$

Limites et inégalités

Proposition

Supposons que $\lim f$ et $\lim g$ existent (finies ou infinies), alors :

$$(\forall x \in D,\ f(x) \leq g(x)) \implies \lim f \leq \lim g.$$

Limites et inégalités

Proposition

Supposons que $\lim f$ et $\lim g$ existent (finies ou infinies), alors :

$$(\forall x \in D,\ f(x) \leq g(x)) \implies \lim f \leq \lim g.$$

Attention

Attention, après passage à la limite, une inégalité stricte peut devenir large :
$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > -e^x$ mais $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} -e^x$.

Théorème des gendarmes – 1

Théorème

$$\begin{cases} \forall x \in D,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim f = \lim h = \ell \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \lim g = \ell$$

Démonstration pour une limite en un point.

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
Il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta_2 \implies |h(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
Posons $\eta := \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ et considérons $x \in D$ vérifiant $|x - a| \leq \eta$.
Alors, puisque $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, on a $\ell - \varepsilon \leq f(x)$.
De même, puisque $|h(x) - \ell| \leq \varepsilon$, on a $h(x) \leq \ell + \varepsilon$.
Ainsi $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon$, et donc $|g(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - a| \leq \eta \implies |g(x) - \ell| \leq \varepsilon$. ∎

Théorème des gendarmes – 2

Exemple

On définit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et on souhaite calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Soit $x > 0$, alors $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exemple

On définit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et on souhaite calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

- Si $x > 0$ alors $-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$.
  Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$, d'après le théorème des gendarmes on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$.
- Si $x < 0$ alors $x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$.
  Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$, d'après le théorème des gendarmes on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Composition et changement de variable – 1

Proposition

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c\end{array}\right. \implies \lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c.$$

Composition et changement de variable – 1

Proposition

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \end{cases} \implies \lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c.$$

Démonstration lorsque $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\tilde{\eta} > 0$ tel que $\forall x \in D$, $|x-b| \leq \tilde{\eta} \implies |g(x)-c| \leq \varepsilon$.
Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in E$, $|x-a| \leq \eta \implies |f(x)-b| \leq \tilde{\eta}$.
Soit $x \in E$ vérifiant $|x-a| \leq \eta$ alors $|f(x)-b| \leq \tilde{\eta}$ et donc $|g(f(x))-c| \leq \varepsilon$.
On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x-a| \leq \eta \implies |g(f(x))-c| \leq \varepsilon.$$

∎

Composition et changement de variable – 2

On souhaite calculer $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

Composition et changement de variable – 2

On souhaite calculer $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Remarquons que $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = g(f(x))$ où $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(u)=\frac{u-2}{u^2-4}$.
On sait que $\lim_{x\to4} f(x) = 2$ et on calcule

$$\lim_{u\to2} g(u) = \lim_{u\to2} \frac{u-2}{u^2-4} = \lim_{u\to2} \frac{u-2}{(u-2)(u+2)} = \lim_{u\to2} \frac{1}{u+2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to4} g\circ f(x) = \frac{1}{4}$.

Composition et changement de variable – 2

On souhaite calculer $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Remarquons que $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = g(f(x))$ où $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(u)=\dfrac{u-2}{u^2-4}$.
On sait que $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 2$ et on calcule

$$\lim_{u\to 2} g(u) = \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{u^2-4} = \lim_{u\to 2} \frac{u-2}{(u-2)(u+2)} = \lim_{u\to 2} \frac{1}{u+2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} g\circ f(x) = \dfrac{1}{4}$.

En pratique, on rédige généralement ce raisonnement de la façon suivante :

Posons $u=\sqrt{x}$ alors $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{u\to 2} \dfrac{u-2}{u^2-4} = \lim\limits_{u\to 2} \dfrac{u-2}{(u-2)(u+2)} = \lim\limits_{u\to 2} \dfrac{1}{u+2} = \dfrac{1}{4}$.

Limites par croissances comparées

Théorème

Soient $a, b > 0$ alors

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^a\,|\ln(x)|^b = 0$

Limites et valeur absolue – 1

Dans cette diapositive, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Proposition

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0$$

Corollaire

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$$

Attention

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$.
Mais il n'y a pas de réciproque.

Prenons par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -42 & \text{si } x \leq 0 \\ 42 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 42$ mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas.

Limites et valeur absolue – 2

Exemple

On souhaite calculer (encore) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

$$0 \leq \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

Limites et fonctions bornées – 1

Proposition

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\begin{cases} f \text{ est bornée} \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Limites et fonctions bornées – 1

Proposition

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\begin{cases} f \text{ est bornée} \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Démonstration dans le cas où $a \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque f est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in D$, $|f(x)| \leq M$.

Puisque $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \ |x - a| \leq \eta \implies |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Soit $x \in D$ tel que $|x - a| \leq \eta$ alors

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, \ |x - a| \leq \eta \implies |f(x)g(x)| \leq \varepsilon.$$

Limites et fonctions bornées – 2

Exemple

On souhaite calculer (encore) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

On sait que $\sin$ est bornée et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x)\dfrac{1}{x} = 0$.

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où D n'est pas majorée (resp. minorée).
On dit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0\right).$$

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où D n'est pas majorée (resp. minorée).
On dit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0\right).$$

Remarquons que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-(ax+b)}{x} + a + \frac{b}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 + a + 0 = a$.

Limites et asymptotes

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où D n'est pas majorée (resp. minorée).
On dit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0\right).$$

Remarquons que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)-(ax+b)}{x} + a + \dfrac{b}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 + a + 0 = a$.

On en déduit le plan d'étude suivant :

1. Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe et est finie alors on pose $a \coloneqq \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   Sinon, f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
2. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$ existe et est finie alors on pose $b \coloneqq \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$.
   Sinon f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.
3. Alors $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.