Notations de Landau

14 décembre 2022

Équivalence de fonctions – 1

Définition : équivalence locale

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D.
On dit que f et g sont équivalentes en a, noté $f \underset{a}{\sim} g$ *(notation de Landau)*, s'il existe une fonction $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle V centré en a telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda(x) g(x) \end{cases}$$

Équivalence de fonctions – 1

Définition : équivalence locale

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D.
On dit que f et g sont équivalentes en a, noté $f \underset{a}{\sim} g$ *(notation de Landau)*, s'il existe une fonction $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle V centré en a telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda(x) g(x) \end{cases}$$

Définition : équivalence asymptotique

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée) et $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).
On dit que f et g sont équivalentes en a, noté $f \underset{a}{\sim} g$ *(notation de Landau)*, s'il existe une fonction $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $V \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée) telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda(x) g(x) \end{cases}$$

Équivalence de fonctions – 2

Proposition

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ avec $f(a) = g(a)$ si $a \in D$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Équivalence de fonctions – 2

Proposition

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ avec $f(a) = g(a)$ si $a \in D$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Démonstration lorsque $a \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Supposons que $f \underset{a}{\sim} g$ alors il existe une fonction $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1$ et $\forall x \in D \cap V,\ f(x) = \lambda(x) g(x)$.

Puisque g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Puisque g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\},\ g(x) \neq 0$.
Définissons $\lambda : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ par $\lambda(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $x \in D \setminus \{a\}$ et $\lambda(x) = 1$ sinon.
Alors $\forall x \in D \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon],\ f(x) = \lambda(x) g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1$. Donc $f \underset{a}{\sim} g$. ■

Équivalence de fonctions – 2

Proposition

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ avec $f(a) = g(a)$ si $a \in D$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemple

Puisque $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et que le dénominateur ne s'annule pas en dehors de 0, on a

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x.$$

Équivalence de fonctions – 3

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} \ell$.

Équivalence de fonctions – 3

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} \ell$.

Démonstration. Puisque $\ell \neq 0$, on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\ell} = 1 \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} \ell.$$

∎

Équivalence de fonctions – 3

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} \ell$.

Attention, le théorème précédent est faux si $\ell = 0$ comme on peut s'en convaincre en considérant la fonction $\sin$ au voisinage de 0.
En effet, supposons par l'absurde que $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} 0$ alors il existe $\lambda : V \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle V centré en 0 tel que $\forall x \in V,\ \sin(x) = \lambda(x) \cdot 0 = 0$.
D'où une contradiction car $\sin$ n'est pas nulle au voisinage de 0.

Équivalence de fonctions – 3

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} \ell$.

Attention, le théorème précédent est faux si $\ell = 0$ comme on peut s'en convaincre en considérant la fonction $\sin$ au voisinage de 0.
En effet, supposons par l'absurde que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$ alors il existe $\lambda : V \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle V centré en 0 tel que $\forall x \in V$, $\sin(x) = \lambda(x) \cdot 0 = 0$.
D'où une contradiction car $\sin$ n'est pas nulle au voisinage de 0.

Néanmoins, on a le résultat suivant.

Corollaire

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Équivalence de fonctions – 3

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} \ell$.

Attention, le théorème précédent est faux si $\ell = 0$ comme on peut s'en convaincre en considérant la fonction $\sin$ au voisinage de 0.
En effet, supposons par l'absurde que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$ alors il existe $\lambda : V \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle V centré en 0 tel que $\forall x \in V$, $\sin(x) = \lambda(x) \cdot 0 = 0$.
D'où une contradiction car $\sin$ n'est pas nulle au voisinage de 0.

Néanmoins, on a le résultat suivant.

Corollaire

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Ébauche de démonstration. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \lambda(x)g(x) = 1 \cdot \ell = \ell$. ■

Équivalence de fonctions – 4

Proposition

L'équivalence de fonctions (en $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) est une relation d'équivalences, c'est-à-dire :

- Elle est réflexive : $f \underset{a}{\sim} f$
- Elle est symétrique : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{a}{\sim} f$
- Elle est transitive : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$

Équivalence de fonctions – 4

Proposition

L'équivalence de fonctions (en $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) est une relation d'équivalences, c'est-à-dire :

- Elle est réflexive : $f \underset{a}{\sim} f$
- Elle est symétrique : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{a}{\sim} f$
- Elle est transitive : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$

Démonstration de la réflexivité lorsque $a \in \mathbb{R}$.
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D.
Définissons $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\lambda(x) = 1$ alors $\forall x \in D,\ f(x) = f(x)\lambda(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1$.

Donc $f \underset{a}{\sim} f$. ∎

Équivalence de fonctions – 4

Proposition

L'équivalence de fonctions (en $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) est une relation d'équivalences, c'est-à-dire :

- Elle est réflexive : $f \underset{a}{\sim} f$
- Elle est symétrique : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{a}{\sim} f$
- Elle est transitive : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$

Démonstration de la symétrie lorsque $a \in \mathbb{R}$.
Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D tels que $f \underset{a}{\sim} g$.

Alors il existe $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $\forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda(x)g(x)$ et $\lim_{x \to a} \lambda(x) = 1$.

Par définition de la limite, on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que
$\forall x \in V,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - 1| \leq \frac{1}{2} \implies f(x) \geq \frac{1}{2}$.
Donc, quitte à réduire V, on peut supposer que $\forall x \in V,\ \lambda(x) \neq 0$.

Alors, $\forall x \in V \cap D,\ g(x) = \frac{1}{\lambda(x)} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{\lambda(x)} = 1$.

Donc $g \underset{a}{\sim} f$. ∎

Équivalence de fonctions – 4

Proposition

L'équivalence de fonctions (en $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) est une relation d'équivalences, c'est-à-dire :

- Elle est réflexive : $f \underset{a}{\sim} f$
- Elle est symétrique : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{a}{\sim} f$
- Elle est transitive : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$

Démonstration de la transitivité lorsque $a \in \mathbb{R}$.
Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D tels que $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$.
Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 : V \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de a telles que

$$\begin{cases} \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda_1(x)g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \lambda_1(x) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall x \in V \cap D,\ g(x) = \lambda_2(x)h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \lambda_2(x) = 1 \end{cases}$$

Alors, on a $\forall x \in V \cap D,\ f(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \lambda_1(x)\lambda_2(x) = 1$.

Donc $f \underset{a}{\sim} h$. ∎

Équivalence de fonctions – 5

Proposition : opérations sur les équivalents

1. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a et $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
3. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ et f_2 ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Équivalence de fonctions – 5

Proposition : opérations sur les équivalents

1. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a et $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
3. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ et f_2 ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Démonstration au tableau.

Équivalence de fonctions – 5

Proposition : opérations sur les équivalents

1. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a et $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
3. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ et f_2 ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Démonstration au tableau.

Proposition : changement de variable (composition à droite)

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $f \underset{b}{\sim} g$ alors $f \circ u \underset{a}{\sim} g \circ u$.

Équivalence de fonctions – 5

Proposition : opérations sur les équivalents

1. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a et $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
3. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ et f_2 ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Démonstration au tableau.

Proposition : changement de variable (composition à droite)

Si $\lim_{x\to a} u(x) = b$ et $f \underset{b}{\sim} g$ alors $f \circ u \underset{a}{\sim} g \circ u$.

Ébauche de démonstration.

$f(x) = \lambda(x)g(x) \implies f(u(x)) = \lambda(u(x))g(u(x))$ et $\lim_{x\to a} \lambda(u(x)) = \lim_{x\to b} \lambda(x) = 1$. ∎

Équivalence de fonctions – 6

Contre-exemple : addition d'équivalents

L'équivalence de fonctions n'est pas stable par addition, comme le montre l'exemple suivant :

$$x \underset{+\infty}{\sim} x+1 \text{ et } -x \underset{+\infty}{\sim} -x \text{ mais } x+(-x) \underset{+\infty}{\nsim} (x+1)+(-x)$$

Équivalence de fonctions – 6

Contre-exemple : addition d'équivalents

L'équivalence de fonctions n'est pas stable par addition, comme le montre l'exemple suivant :

$$x \underset{+\infty}{\sim} x+1 \text{ et } -x \underset{+\infty}{\sim} -x \text{ mais } x+(-x) \underset{+\infty}{\nsim} (x+1)+(-x)$$

Contre-exemple : composition à gauche

L'équivalence de fonctions n'est pas stable par composition à gauche, comme le montre l'exemple suivant :

$$x \underset{+\infty}{\sim} x+1 \text{ mais } e^x \underset{+\infty}{\nsim} e^{x+1}$$

Contre-exemple : addition d'équivalents

L'équivalence de fonctions n'est pas stable par addition, comme le montre l'exemple suivant :

$$x \underset{+\infty}{\sim} x+1 \text{ et } -x \underset{+\infty}{\sim} -x \text{ mais } x+(-x) \underset{+\infty}{\not\sim} (x+1)+(-x)$$

Contre-exemple : composition à gauche

L'équivalence de fonctions n'est pas stable par composition à gauche, comme le montre l'exemple suivant :

$$x \underset{+\infty}{\sim} x+1 \text{ mais } e^x \underset{+\infty}{\not\sim} e^{x+1}$$

Contre-exemple : passage à la dérivée

L'équivalence de fonctions n'est pas stable par dérivation, comme le montre l'exemple suivant. Posons $f(x) = x+1$ et $g(x) = 1$ au voisinage de 0 alors $f \underset{0}{\sim} g$ mais $f' \underset{0}{\not\sim} g'$.

Négligeabilité – 1

Définition : négligeabilité au voisinage d'un point

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D.
On dit que f est négligeable devant g en a, noté $f \underset{a}{=} o(g)$ *(notation de Landau)* ou $f \underset{a}{\ll} g$ *(notation de Hardy)*, s'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle V centré en a telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x) \end{cases}$$

Négligeabilité – 1

Définition : négligeabilité au voisinage d'un point

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D.
On dit que f est négligeable devant g en a, noté $f \underset{a}{=} o(g)$ *(notation de Landau)* ou $f \underset{a}{\ll} g$ *(notation de Hardy)*, s'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle V centré en a telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x) \end{cases}$$

À l'aide de quantificateurs, on a :

$$f \underset{a}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \left[a - \eta, a + \eta\right] \cap D,\ |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|$$

Négligeabilité – 2

Définition : négligeabilité asymptotique

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée) et $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).
On dit que f est négligeable devant g en a, noté $f \underset{a}{=} o(g)$ *(notation de Landau)* ou $f \underset{a}{\ll} g$ *(notation de Hardy)*, s'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $V \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée) telle que

$$\begin{cases} \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x) \end{cases}$$

Négligeabilité – 2

Définition : négligeabilité asymptotique

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée) et $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).
On dit que f est négligeable devant g en a, noté $f \underset{a}{=} o(g)$ *(notation de Landau)* ou $f \underset{a}{\ll} g$ *(notation de Hardy)*, s'il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $V \subset \mathbb{R}$ non-majorée (resp. non-minorée) telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x) \end{cases}$$

À l'aide de quantificateurs, on a :

$$f \underset{+\infty}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [M, +\infty[\cap D,\ |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|$$

$$f \underset{-\infty}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty, m] \cap D,\ |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|$$

Négligeabilité – 3

Proposition

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ avec $f(a) = 0$ si $a \in D$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $f \underset{a}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Négligeabilité – 3

Proposition

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ avec $f(a) = 0$ si $a \in D$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $f \underset{a}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Démonstration lorsque $a \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Supposons que $f \underset{a}{=} o(g)$ alors il existe une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\forall x \in D \cap V,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x)$.

Puisque g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Puisque g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [a-\eta, a+\eta] \setminus \{a\},\ g(x) \neq 0$.
Définissons $\varepsilon : [a-\eta, a+\eta] \to \mathbb{R}$ par $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ si $x \in D \setminus \{a\}$ et $\varepsilon(x) = 0$ sinon.
Alors $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap D,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc $f \underset{a}{=} o(g)$. ∎

Négligeabilité – 3

Proposition

Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ avec $f(a) = 0$ si $a \in D$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors $f \underset{a}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Exemple

- $x^m \underset{x \to 0}{=} o(x^n) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} x^{m-n} = 0 \Leftrightarrow m > n$
- $x^m \underset{x \to +\infty}{=} o(x^n) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x^{m-n} = 0 \Leftrightarrow m < n$

Négligeabilité – 4

Exemple

Montrons que $x - \arctan(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

Les fonctions $f(x) = x - \arctan(x)$ et $g(x) = x^2$ sont bien définies et deux fois dérivables au voisinage de 0.
De plus $g''(x) = 2$ ne s'annule pas et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{(1+x^2)^2} = 0$, on déduit du théorème de L'Hôpital que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

et donc que $x - \arctan(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

Négligeabilité – 5

Proposition

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
2. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
3. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.

Négligeabilité – 5

Proposition

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
2. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
3. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.

Démonstration du premier point.
Supposons que $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors il existe ε_1 et ε_2 définies au voisinage de a telles que

$$\begin{cases} f(x) = \varepsilon_1(x) g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \varepsilon_2(x) h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0 \end{cases}.$$

Alors $f(x) = \varepsilon_1(x) g(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) = 0$.

Donc $f \underset{a}{=} o(h)$. ■

Négligeabilité – 5

Proposition

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
2. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
3. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.

Démonstration du deuxième point.
Supposons que $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors il existe ε_1 et ε_2 définies au voisinage de a telles que

$$\begin{cases} f_1(x) = \varepsilon_1(x) g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_2(x) = \varepsilon_2(x) g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0 \end{cases}.$$

Alors $f_1(x) + f_2(x) = (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) = 0$.

Donc $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$. ∎

Négligeabilité – 5

Proposition

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
2. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
3. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.

Démonstration du troisième point.
Supposons que $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors il existe ε_1 et ε_2 définies au voisinage de a telles que

$$\begin{cases} f_1(x) = \varepsilon_1(x) g_1(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_2(x) = \varepsilon_2(x) g_2(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0 \end{cases}.$$

Alors $f_1(x) f_2(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) g_1(x) g_2(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) = 0$.
Donc $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$. ∎

Négligeabilité – 5

Proposition

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
2. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
3. Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.

Contre-exemple : on ne peut pas sommer dans le petit o

On n'a pas que si $f \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f \underset{a}{=} o(g_2)$ alors $f \underset{a}{=} o(g_1 + g_2)$.

En effet, $x^3 = \underset{x \to 0}{o}(x^3 - x^2)$ et $x^3 = \underset{x \to 0}{o}(x^2)$ mais $x^3 \neq \underset{x \to 0}{o}(x^3)$.

Exercices

Vrai ou Faux ? Justifier.

1. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.
2. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.
3. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(42x)$.
4. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$ alors $f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.
5. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$ alors $f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.

Négligeabilité – 7

On écrit $f(x) = g(x) + \underset{a}{o}(h(x))$ pour signifier qu'il existe une fonction r telle que $r = \underset{a}{o}(h)$ et

$$f(x) = g(x) + r(x).$$

Autrement dit, $f(x) = g(x) + \underset{a}{o}(h(x))$ signifie qu'il existe une fonction ε telle que

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + \varepsilon(x)h(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Exercices

Si $f(x) = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $g(x) = 2x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ alors :

1. $f(x) + g(x) = 1 + 3x + \underset{x\to 0}{o}(x)$
2. $f(x)g(x) = 2x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$

Négligeabilité – 8

Proposition

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + \underset{a}{o}(g)$$

Négligeabilité – 8

Proposition

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + \underset{a}{o}(g)$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ Supposons que $f \underset{a}{\sim} g$ alors il existe $\lambda : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $f = \lambda g$ et $\lim_a \lambda = 1$.

Définissons $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ par $\varepsilon = \lambda - 1$ alors $f = g\lambda = g + g\varepsilon$ où $\lim_a \varepsilon = 0$.

D'où $f = g + \underset{a}{o}(g)$.

$\Leftarrow$ Supposons que $f = g + \underset{a}{o}(g)$ alors il existe $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a telle que $f = g + \varepsilon g$ et $\lim_a \varepsilon = 0$.

Définissons $\lambda : V \to \mathbb{R}$ par $\lambda = 1 + \varepsilon$ alors $f = \lambda g$ où $\lim_a \lambda = 1$.

D'où $f \underset{a}{\sim} g$. ∎

Négligeabilité – 9

Proposition

Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$ alors

$$(\ln x)^\alpha \underset{x \to +\infty}{\ll} x^\beta \underset{x \to +\infty}{\ll} e^{\gamma x}.$$