

RÈGLE DE L'HÔPITAL



12 décembre 2022

Définition

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est adhérent à D si

$$\forall \varepsilon > 0, [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap D \neq \emptyset.$$

Définition

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est adhérent à D si

$$\forall \varepsilon > 0, [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap D \neq \emptyset.$$

Exemple

Si $a \in D$ alors a est adhérent à D puisque

$$\forall \varepsilon > 0, a \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap D.$$

Propriété vraie sur un voisinage – 1

Définition

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est adhérent à D si

$$\forall \varepsilon > 0, [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap D \neq \emptyset.$$

Exemple

Si $a \in D$ alors a est adhérent à D puisque

$$\forall \varepsilon > 0, a \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap D.$$

Exemple

0 est adhérent à $]0, 1[$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Posons $x := \min(\varepsilon, 1/2)$, alors $x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \cap]0, 1[$.

On a bien montré que $\forall \varepsilon > 0, [-\varepsilon, \varepsilon] \cap]0, 1[\neq \emptyset$.

Exemple

Considérons $D := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.



- 0 est adhérent à D :

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Donc $\frac{1}{n} \in [-\varepsilon, \varepsilon] \cap D$.

- $\frac{2}{3}$ n'est pas adhérent à D :

Posons $\varepsilon := \frac{1}{7} > 0$ alors $\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{7}, \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \right] = \left[\frac{11}{21}, \frac{17}{21} \right]$.

Alors $\frac{1}{2} < \frac{11}{21} < \frac{17}{21} < 1$ et donc $\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{7}, \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \right] \cap D = \emptyset$.



Définition

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D . On dit que f vérifie une propriété au voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Définition

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D . On dit que f vérifie une propriété au voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Exemple

La fonction $\cos$ est strictement positive au voisinage de 0 car $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \cos(x) > 0$.

Propriété vraie sur un voisinage – 3

Définition

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D .
On dit que f vérifie une propriété au voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Exemple

La fonction $\cos$ est strictement positive au voisinage de 0 car $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \cos(x) > 0$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Alors " f ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a " signifie que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}, f(x) \neq 0.$$

Propriété vraie sur un voisinage – 3

Définition

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D .
On dit que f vérifie une propriété au voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Exemple

La fonction $\cos$ est strictement positive au voisinage de 0 car $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \cos(x) > 0$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.
Alors " f ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a " signifie que
$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}, f(x) \neq 0.$$

Par exemple, la fonction $\sin$ ne s'annule pas au voisinage de 0 privé de 0.

Définition

Une partie $D \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si elle est non-majorée (resp. non-minorée).

Propriété vraie sur un voisinage – 4

Définition

Une partie $D \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si elle est non-majorée (resp. non-minorée).

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-majorée.

On dit que f vérifie une propriété au voisinage de $+\infty$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap [M, +\infty[$.

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-minorée.

On dit que f vérifie une propriété au voisinage de $-\infty$ s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap]-\infty, m]$.

Propriété vraie sur un voisinage – 4

Définition

Une partie $D \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si elle est non-majourée (resp. non-minorée).

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-majourée.

On dit que f vérifie une propriété au voisinage de $+\infty$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap [M, +\infty[$.

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ non-minorée.

On dit que f vérifie une propriété au voisinage de $-\infty$ s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie cette propriété sur $D \cap]-\infty, m]$.

Exemple

La fonction $\ln$ est positive au voisinage de $+\infty$ car $\forall x \in [1, +\infty[, \ln(x) \geq 0$.

Théorème de Rolle (rappel)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle (rappel)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire : théorème des accroissements finis généralisé

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $a < b$.

Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Théorème de Rolle (rappel)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire : théorème des accroissements finis généralisé

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ où $a < b$.

Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Démonstration.

On définit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$.

Alors φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, i.e.

$$f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0.$$

Règle de L'Hôpital – 2

Lemme

Soient $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle et $a \in \bar{I}$ (possiblement $\pm\infty$).

On suppose que g est dérivable au voisinage de a sauf peut-être en a .

Si g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a .

Règle de L'Hôpital – 2

Lemme

Soient $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle et $a \in \bar{I}$ (possiblement $\pm\infty$).

On suppose que g est dérivable au voisinage de a sauf peut-être en a .

Si g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a .

Démonstration. Montrons la contraposée lorsque $a \in \mathbb{R}$ (il faut adapter les ensembles si $a = \pm\infty$).

On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap (I \setminus \{a\}), g(c) = 0$$

et on veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap \text{Der}_g, g'(c) = 0.$$

Règle de L'Hôpital – 2

Lemme

Soient $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle et $a \in \bar{I}$ (possiblement $\pm\infty$).

On suppose que g est dérivable au voisinage de a sauf peut-être en a .

Si g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a .

Démonstration. Montrons la contraposée lorsque $a \in \mathbb{R}$ (il faut adapter les ensembles si $a = \pm\infty$).

On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap (I \setminus \{a\}), g(c) = 0$$

et on veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap \text{Der}_g, g'(c) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap (I \setminus \{a\}) \subset \text{Der}_g$.

Par hypothèse¹, il existe $c_1, c_2 \in I$ vérifiant $a < c_1 < c_2 < a + \varepsilon$ ou $a - \varepsilon < c_2 < c_1 < a$ tels que $g(c_1) = g(c_2) = 0$.

Alors, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]c_1, c_2[$ tel que $g'(c) = 0$. ■

Règle de L'Hôpital – 2

Lemme

Soient $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle et $a \in \bar{I}$ (possiblement $\pm\infty$).

On suppose que g est dérivable au voisinage de a sauf peut-être en a .

Si g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a alors g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a .

Démonstration. Montrons la contraposée lorsque $a \in \mathbb{R}$ (il faut adapter les ensembles si $a = \pm\infty$).

On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap (I \setminus \{a\}), g(c) = 0$$

et on veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap \text{Der}_g, g'(c) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap (I \setminus \{a\}) \subset \text{Der}_g$.

Par hypothèse¹, il existe $c_1, c_2 \in I$ vérifiant $a < c_1 < c_2 < a + \varepsilon$ ou $a - \varepsilon < c_2 < c_1 < a$ tels que $g(c_1) = g(c_2) = 0$.

Alors, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]c_1, c_2[$ tel que $g'(c) = 0$. ■

¹Quitte à appliquer l'hypothèse trois fois, d'après le principe des tiroirs on peut supposer que c_1 et c_2 sont soit tous les deux plus grands que a soit tous les deux plus petits que a .

Théorème : règle de L'Hôpital

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle.

Soient $a \in \bar{I}$ (possiblement $+\infty$ ou $-\infty$) et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si

- 1 f et g sont dérivables au voisinage de a sauf peut-être en a ,
- 2 g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a ,
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$,
- 4 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Théorème : règle de L'Hôpital

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle.

Soient $a \in \bar{I}$ (possiblement $+\infty$ ou $-\infty$) et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si

- 1 f et g sont dérivables au voisinage de a sauf peut-être en a ,
- 2 g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a ,
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$,
- 4 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

- D'après le lemme précédent, $\frac{f}{g}$ est bien définie au voisinage de a privé de a .

Théorème : règle de L'Hôpital

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle.

Soient $a \in \bar{I}$ (possiblement $+\infty$ ou $-\infty$) et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si

- 1 f et g sont dérivables au voisinage de a sauf peut-être en a ,
- 2 g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a ,
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$,
- 4 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

- D'après le lemme précédent, $\frac{f}{g}$ est bien définie au voisinage de a privé de a .
- Le théorème est valable pour une limite en un point, une limite à droite ou à gauche en un point (il suffit de restreindre f), une limite en $+\infty$ ou une limite en $-\infty$.

Règle de L'Hôpital – 4

Démonstration de la règle de L'Hôpital lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Quitte à réaliser un changement de variable et à prolonger f et g , on peut supposer que $a \in I$ et $f(a) = g(a) = 0$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que f et g sont dérivables sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus\{a\}$ et

$$\forall x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus\{a\}, g(x) \neq 0 \text{ et } g'(x) \neq 0.$$

Soit $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus\{a\}$.

D'après le théorème des accroissements finis généralisé, il existe $c \in]a, x[$ si $a < x$ ou $c \in]x, a[$ si $a > x$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \ell.$$



Règle de L'Hôpital – 5

Démonstration de la règle de L'Hôpital lorsque $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$.

TODO



Contre-exemple si l'hypothèse 3 n'est pas vérifiée

Considérons $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 2x + 1$.

Alors f et g vérifient toutes les hypothèses du théorème de L'Hôpital pour la limite en 1 sauf la troisième.

On a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}$ alors que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{3}$.

Contre-exemple si l'hypothèse 4 n'est pas vérifiée

Considérons $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x + \sin(x)$ et $g(x) = x$.

Alors f et g vérifient toutes les hypothèses du théorème de L'Hôpital pour la limite en $+\infty$ sauf la quatrième.

En effet $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x)}{1}$ n'existe pas.

Néanmoins $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Contre-exemple si l'hypothèse 4 n'est pas vérifiée

Considérons $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x + \sin(x)$ et $g(x) = x$.

Alors f et g vérifient toutes les hypothèses du théorème de L'Hôpital pour la limite en $+\infty$ sauf la quatrième.

En effet $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x)}{1}$ n'existe pas.

Néanmoins $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

L'exemple précédent montre que :

- ❶ Si $\lim \frac{f'}{g'}$ n'existe pas, on ne peut pas en déduire que $\lim \frac{f}{g}$ n'existe pas.
- ❷ Si $\lim \frac{f}{g} = \ell$, on ne peut pas en déduire que $\lim \frac{f'}{g'} = \ell$.

Exemples – 1

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (*encore !*)
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(x)}{x - \pi}$ (*avec et sans L'Hôpital !*)
- 3 Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x)$
- 4 Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln(x)}$
- 5 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + x}$
- 6 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$
- 7 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x - \sin(x)}$

Exemples – 2

8 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

9 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle.
Montrer que si f est de classe C^2 au voisinage de a alors

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

10 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

11 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/2} + x^{-1/2}}{x^{1/2} - x^{-1/2}}$

12 Trouver un polynôme P tel que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{e^x - e \cdot x} = \frac{1}{e}$