DÉRIVABILITÉ

18 octobre 2022

Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non-vide et non-réduit à un point[a]. Soit $a \in I$.
On dit que f est *dérivable en* a si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

[a] Pour que la notion de dérivabilité ait du sens, il suffit de supposer que a soit un point non-isolé du domaine. Mais, en pratique, nous ne travaillerons qu'avec des fonctions définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles).

Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non-vide et non-réduit à un point[a]. Soit $a \in I$.
On dit que f est *dérivable en* a si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

[a] Pour que la notion de dérivabilité ait du sens, il suffit de supposer que a soit un point non-isolé du domaine. Mais, en pratique, nous ne travaillerons qu'avec des fonctions définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles).

La fonction définie par $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sur un voisinage épointée de a est le **taux d'accroissement de f en a**.

Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non-vide et non-réduit à un point[a]. Soit $a \in I$.
On dit que f est *dérivable en a* si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(a) \coloneqq \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

[a] Pour que la notion de dérivabilité ait du sens, il suffit de supposer que a soit un point non-isolé du domaine. Mais, en pratique, nous ne travaillerons qu'avec des fonctions définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles).

La fonction définie par $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sur un voisinage épointée de a est le **taux d'accroissement de f en a**.

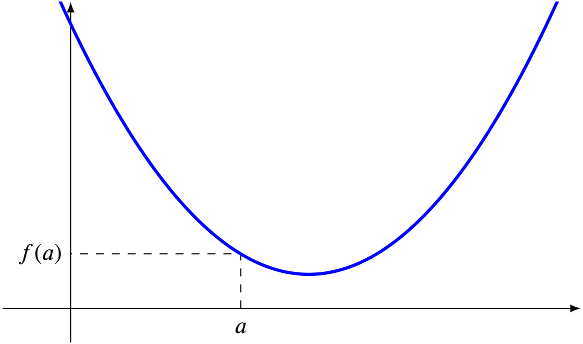
En posant le changement de variable $x = a + h$:
$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

Dans ce cas, $\displaystyle f'(a) \coloneqq \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Interprétation géométrique – 1

La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.

Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.

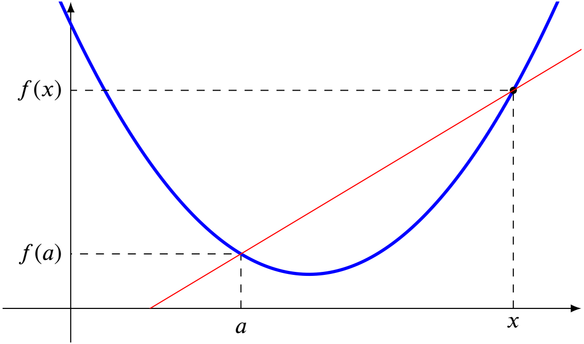


On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.

Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.
Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.

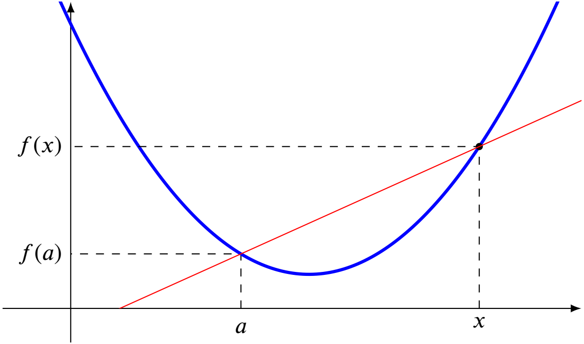


On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.
Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.

Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.

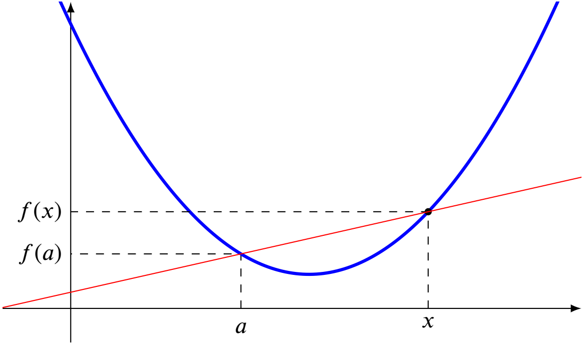


On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.

Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

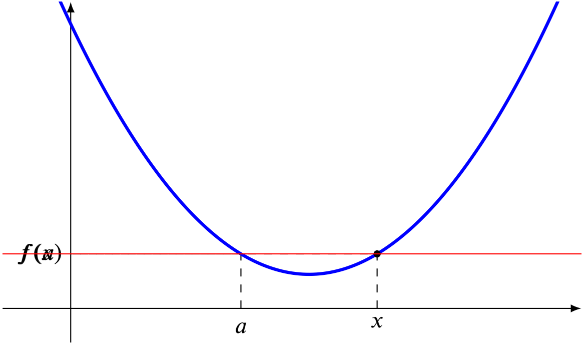
La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.



On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.
Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.

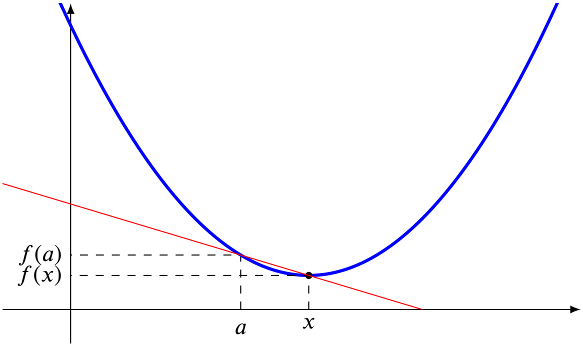


On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.
Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.

Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.

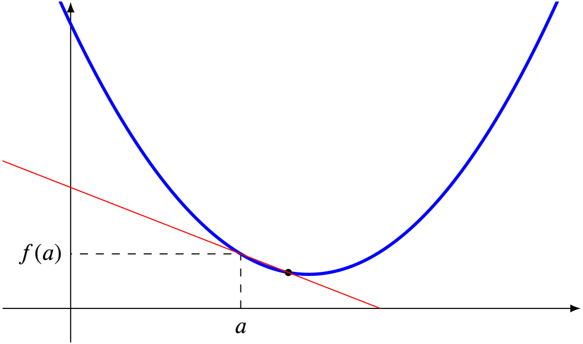


On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.

Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

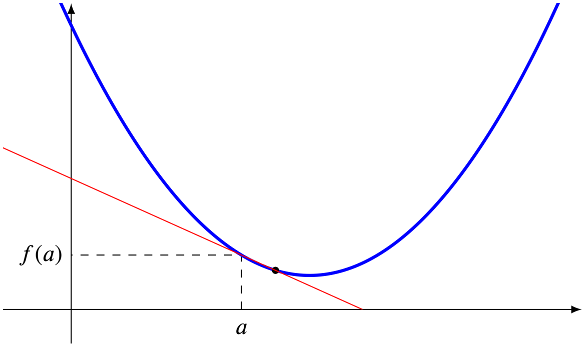
La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.



On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.
Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

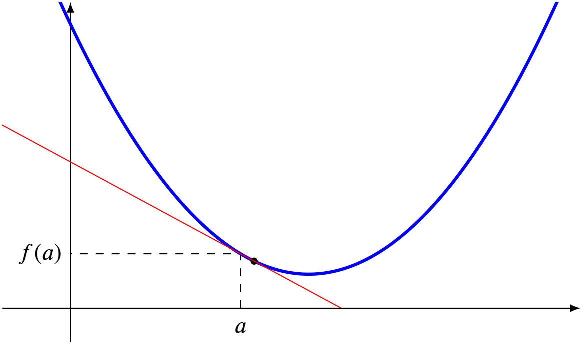
La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.



On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.
Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

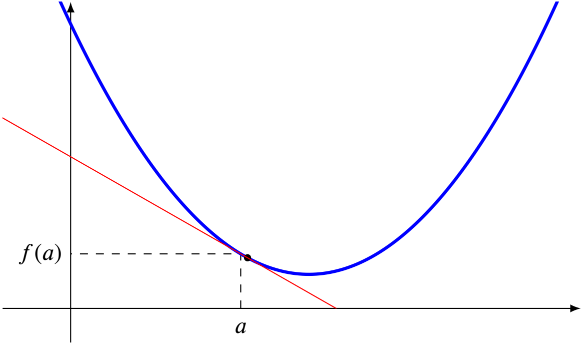
La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.



On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.
Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.

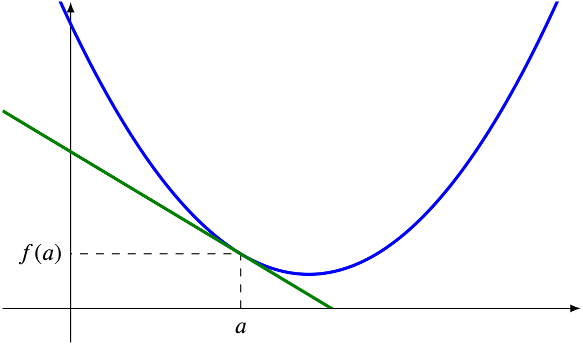


On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.
Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.

Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.

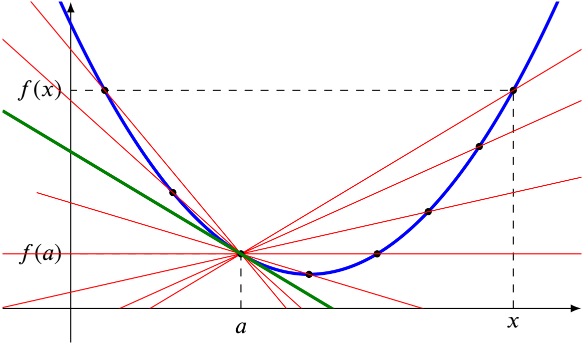


On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.
Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Interprétation géométrique – 1

La sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.

Donc f est dérivable en a si et seulement si les sécantes passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ tendent vers une droite non-verticale T_a lorsque x tend vers a.



On appelle alors cette droite la *tangente* de f en a.

Si elle existe, elle passe par $(a, f(a))$ et est de pente $f'(a)$: elle admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

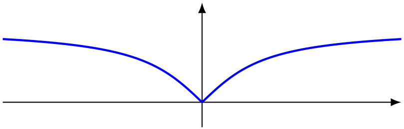
Interprétation géométrique – 2

Géométriquement, f n'est pas dérivable en a :

Interprétation géométrique – 2

Géométriquement, f n'est pas dérivable en a :

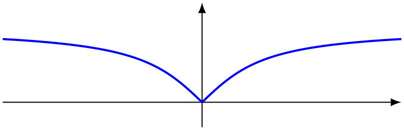
- si les sécantes ne tendent pas vers une droite (par exemple, si elles tendent vers deux droites différentes à droite et à gauche : i.e. il y a un *pic* sur le graphe de f en a) ;



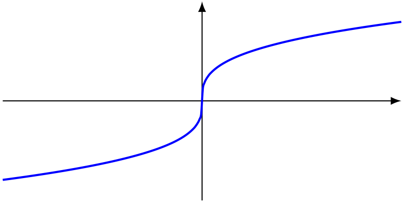
Interprétation géométrique – 2

Géométriquement, f n'est pas dérivable en a :

- si les sécantes ne tendent pas vers une droite (par exemple, si elles tendent vers deux droites différentes à droite et à gauche : i.e. il y a un *pic* sur le graphe de f en a) ;



- ou si les sécantes tendent vers une droite verticale (i.e. une tangente de pente infinie).



Dérivabilité et continuité

Proposition

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Dérivabilité et continuité

Proposition

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration.
Supposons que f soit dérivable en a. Alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a).$$

Donc f est continue en a. ■

Dérivabilité et continuité

Proposition

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration.
Supposons que f soit dérivable en a. Alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a).$$

Donc f est continue en a. ∎

Attention !

La réciproque du résultat précédent est fausse.
Prenons par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ alors f est continue en 0 mais f n'est pas dérivable en 0.
En effet, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 = 1$. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Quelques dérivées usuelles

1. La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1$.
3. La fonction monôme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.
5. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Quelques dérivées usuelles

1. La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1$.
3. La fonction monôme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.
5. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration :

Quelques dérivées usuelles

1. La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1$.
3. La fonction monôme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.
5. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration :
1. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$\blacksquare$

Quelques dérivées usuelles

1. La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1$.
3. La fonction monôme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.
5. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration :

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

■

Quelques dérivées usuelles

1. La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1$.
3. La fonction monôme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.
5. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration :
3. Soit $a \in \mathbb{R}$, si $n = 0$ ou $n = 1$, c'est exactement les points précédents sinon si $n \geq 2$ alors

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k h^{n-k} - a^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} a^k h^{n-k} + na^{n-1}h + a^n - a^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} a^k h^{n-k-1} + na^{n-1} = na^{n-1}\end{aligned}$$

■

Quelques dérivées usuelles

1. La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1$.
3. La fonction monôme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.
5. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration :
4. Soit $a > 0$, alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Quelques dérivées usuelles

1. La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1$.
3. La fonction monôme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.
5. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration :
4. Soit $a > 0$, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}{(x - a)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} = \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Remarquons que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 puisque :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Quelques dérivées usuelles

1. La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1$.
3. La fonction monôme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.
5. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration :
5. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

$\blacksquare$

Quelques dérivées usuelles

1. La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 1$.
3. La fonction monôme $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mais n'est pas dérivable en 0.
5. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Dérivées et opérations usuelles

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$, alors :

1. $f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$,
5. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Dérivées et opérations usuelles

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$, alors :

1. $f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$,
5. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Démonstration :

Dérivées et opérations usuelles

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$, alors :

1. $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$,
5. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Démonstration :
1. et 2.

$$\lim_{x\to a} \frac{(\lambda f(x) + g(x)) - (\lambda f(a) + g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(\lambda \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) = \lambda f'(a) + g'(a).$$

∎

Dérivées et opérations usuelles

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$, alors :

1. $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$,
5. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Démonstration :
3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

■

Dérivées et opérations usuelles

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$, alors :

1. $f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$,
5. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Démonstration :

4.

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{g(a)-g(x)}{(x-a)g(a)g(x)} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

■

Dérivées et opérations usuelles

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$, alors :

1. $f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$,
5. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Démonstration :

5. il suffit de remarquer $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ et d'utiliser 3 et 4. ∎

Dérivées et opérations usuelles

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$, alors :

1. $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
4. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$,
5. si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Dérivées et composition

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $I, J \subset \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) \subset J$.
Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Dérivées et composition

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $I, J \subset \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(f) \subset J$.
Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Démonstration.

Posons $\varepsilon_1(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)$.

Posons $\varepsilon_2(h) = \begin{cases} \frac{g(f(a)+h)-g(f(a))}{h} - g'(f(a)) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors $\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$ et $g(f(a) + h) = g(f(a)) + hg'(f(a)) + h\varepsilon_2(h)$.

Ainsi

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) = g(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)) \\ &= g(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))g'(f(a)) + (hf'(a) + h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h)).\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = (f'(a) + \varepsilon_1(h))g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(h))\varepsilon_2(hf'(a) + h\varepsilon_1(h)).$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a)}{h} = f'(a)g'(f(a)).$$

Théorème de Rolle

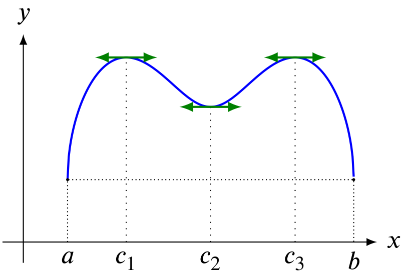
Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.
Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$
alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.
Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$
alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le théorème de Rolle énonce que si une fonction dérivable sur un intervalle prend la même valeur en deux points distincts alors il existe au moins un point où sa tangente est horizontale.



Théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$
alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration.
D'après le théorème de Weierstrass, f est bornée et atteint ses bornes. Notons m (resp. M) le plus petit (resp. grand) élément de $f([a,b])$.

- Si $m = M$ alors f est constante et $f' = 0$.
- Si $m < M$ alors on ne peut pas avoir $f(a) = m$ et $f(a) = M$.
  Supposons que $f(a) = f(b) \neq M$.
  Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$ puisque M est atteint par f.
  Soit h tel que $c + h \in [a,b]$ alors $f(c+h) \leq M = f(c)$, i.e. $f(c+h) - f(c) \leq 0$.
  Ainsi
  $$f'(c) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad f'(c) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0.$$
  Donc $f'(c) = 0$. ■

Théorème des accroissements finis – 1

Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation physique.

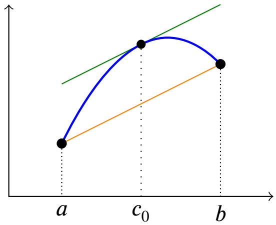
Le théorème des accroissements finis énonce qu'il existe un moment où la vitesse instantanée coïncide avec la vitesse moyenne.

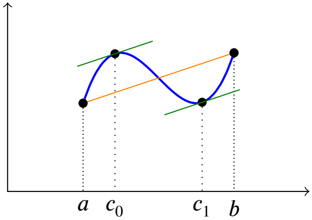
Théorème des accroissements finis

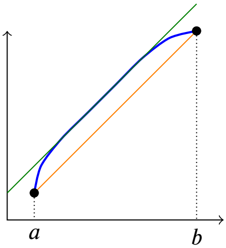
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interprétation géométrique.
Le théorème des accroissements finis énonce qu'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que la tangente en c est parallèle à la sécante entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.







Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration.

Définissons $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

alors φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, i.e.

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

■

Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$.
Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Démonstration.
Définissons $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

alors φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$.
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, i.e.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

$\blacksquare$

Remarque. Le théorème de Rolle est un cas particulier du TAF où $a = b$ et nous avons utilisé le théorème de Rolle pour démontrer le TAF : ces deux résultats sont donc équivalents.

Théorème des accroissements finis – 2

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors

1. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I
2. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I
3. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I
4. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I
5. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

Théorème des accroissements finis – 2

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors

1. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I
2. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I
3. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I
4. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I
5. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

Démonstration.

Théorème des accroissements finis – 2

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors

1. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I
2. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I
3. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I
4. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I
5. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

Démonstration.
1. Si f est constante alors on a déjà montré que $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
Réciproquement, soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, d'après le TAF, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) = 0$ donc $f(b) = f(a)$.

Théorème des accroissements finis – 2

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors

1. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I
2. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I
3. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I
4. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I
5. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

Démonstration.
1. Si f est constante alors on a déjà montré que $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
Réciproquement, soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, d'après le TAF, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) = 0$ donc $f(b) = f(a)$.

2. Supposons que f soit croissante. Si $a \in \mathring{I}$ alors $f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.

Réciproquement, supposons que $f' \geq 0$.
Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, d'après le TAF, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \geq 0$. Donc $f(b) \geq f(a)$.

Théorème des accroissements finis – 2

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors

1. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I
2. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I
3. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I
4. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I
5. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

Démonstration.
1. Si f est constante alors on a déjà montré que $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
Réciproquement, soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, d'après le TAF, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) = 0$ donc $f(b) = f(a)$.

2. Supposons que f soit croissante. Si $a \in \mathring{I}$ alors $f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.

Réciproquement, supposons que $f' \geq 0$.
Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, d'après le TAF, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \geq 0$. Donc $f(b) \geq f(a)$.

Les autres points se démontrent de la même façon. ∎

Théorème des accroissements finis – 2

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors

1. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I
2. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I
3. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I
4. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I
5. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

Remarque. La réciproque des points *3* et *5* est fausse.
En effet, si on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

Théorème des accroissements finis – 2

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$, alors

1. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I
2. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I
3. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I
4. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I
5. $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

Remarque. La réciproque des points *3* et *5* est fausse.
En effet, si on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

Remarque. L'hypothèse que le domaine est un intervalle est primordiale, comme on peut le constater avec $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
En effet, $f' = 0$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ mais f n'est pas constante.

Théorème de la bijection

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On définit $\tilde{f} : I \to f(I)$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$.
Si f est continue et strictement monotone alors :

1. $f(I)$ est un intervalle,
2. $\tilde{f}$ est bijective,
3. $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f,
4. $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$,
5. Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$ alors $\tilde{f}^{-1}$ est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(\tilde{f}^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Arc cosinus – 1

La fonction $\cos : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement décroissante. Son image est $[-1,1]$ (pourquoi ?).
Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ admet une réciproque que l'on note

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

et qui est continue et strictement décroissante.
Cette fonction est caractérisée par

$$\forall (x,y) \in [-1,1] \times [0,\pi],\ y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y).$$

De plus, $\cos$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et sa dérivée $\cos' = -\sin$ ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, donc $\arccos$ est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\arccos'(x) = \arccos'(\cos(\arccos(x))) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé que $\cos^2(\arccos(x)) + \sin^2(\arccos(x)) = 1$ d'où

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$$

et donc $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ puisque $\sin$ est positif sur $[0,\pi]$.

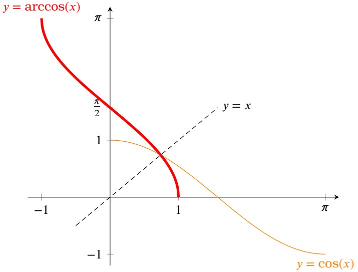
Arc cosinus – 2

Proposition

La fonction $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in [-1,1], \forall y \in [0,\pi],\ y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$,
2. arccos est continue,
3. arccos est strictement décroissante,
4. arccos est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

x	-1		1
$\arccos'(x)$	‖	$-$	‖
$\arccos(x)$	π	↘	0



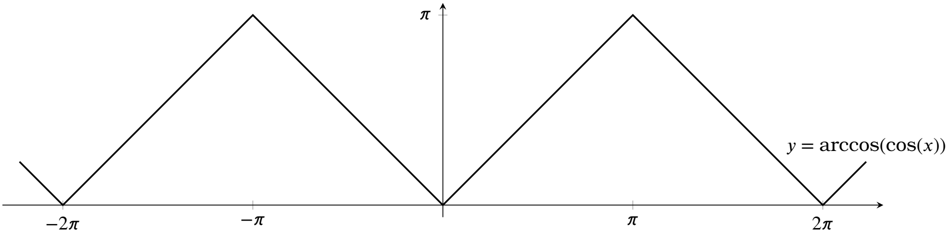
Arc cosinus – 3

Par définition de $\arccos$, on a bien que

$$\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos(x)) = x.$$

Mais on prendra garde à ne pas écrire trop vite que $\arccos(\cos(x)) = x$: c'est vrai pour $x \in [0,\pi]$ mais pas pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \arccos(\cos(x))$ est continue, 2π-périodique, paire et $\arccos(\cos(x)) = x$ pour $x \in [0,\pi]$.
Son graphe est donc :



Arc tangente

De même, on définit $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ comme la réciproque de $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.

Proposition

La fonction $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$,
2. $\arctan$ est continue, strictement croissante et impaire,
3. $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

x	$-\infty$	∞
$\arctan'(x)$	$+$	
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$