*Analyse Élémentaire*

# Continuité

17 octobre 2022

# Définition – 1

## Définition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in D$.
On dit que $f$ est *continue en* $a$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

# Définition – 1

## Définition

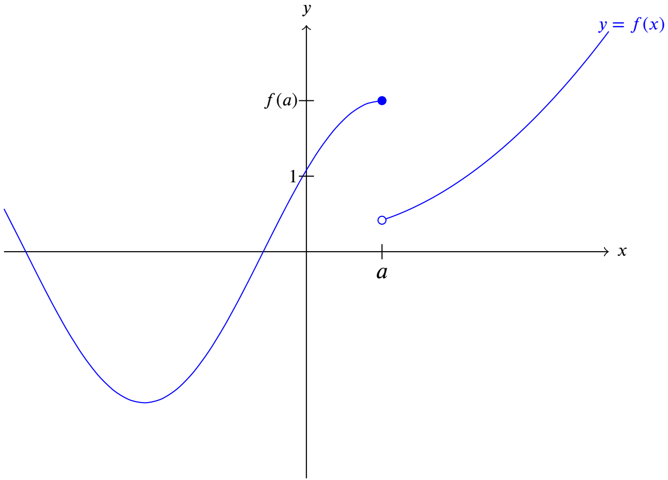
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in D$.
On dit que $f$ est *continue en $a$* si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Formellement, cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$

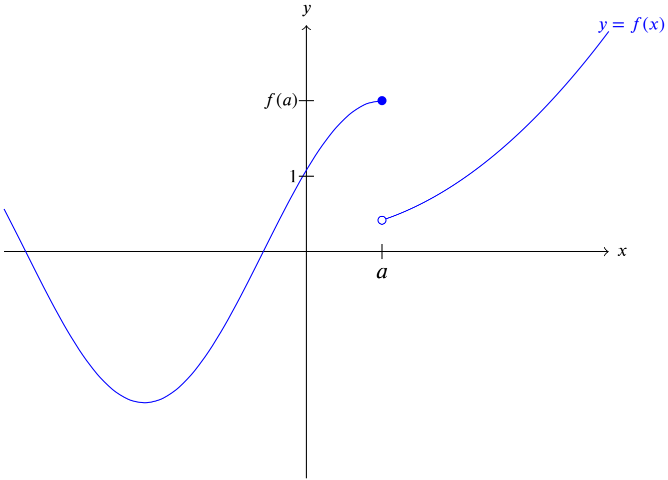
# Définition – 2

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous n'est pas continue en $a$ :



# Définition – 2

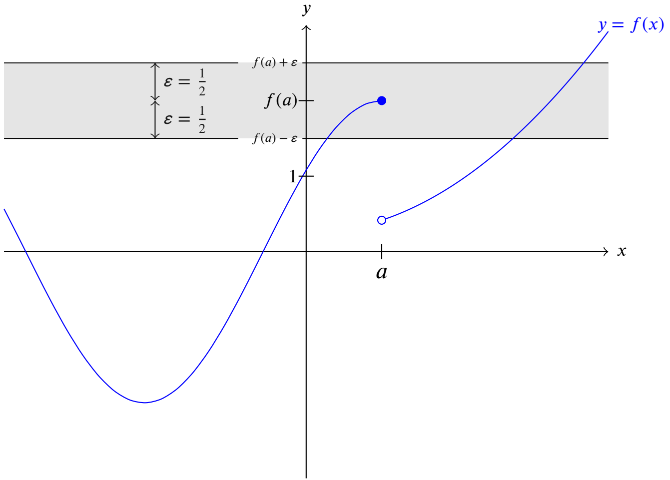
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous n'est pas continue en $a$ :




La négation de "$f$ est continue en $a$" est : $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$.

# Définition – 2

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous n'est pas continue en $a$ :

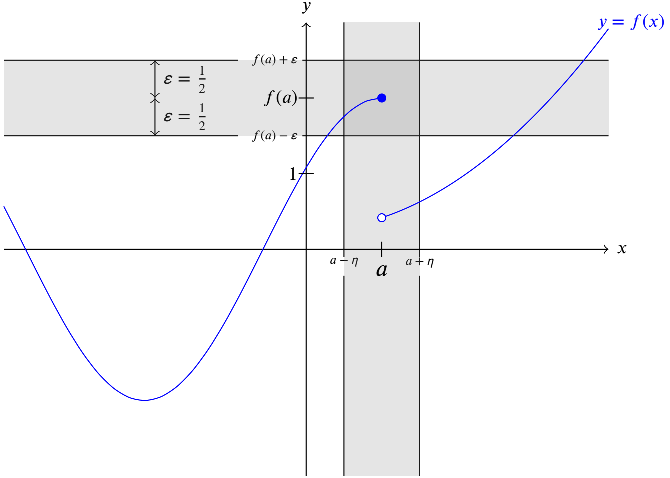



Posons $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{2}$.

La négation de "$f$ est continue en $a$" est : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$.

# Définition – 2

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous n'est pas continue en $a$ :

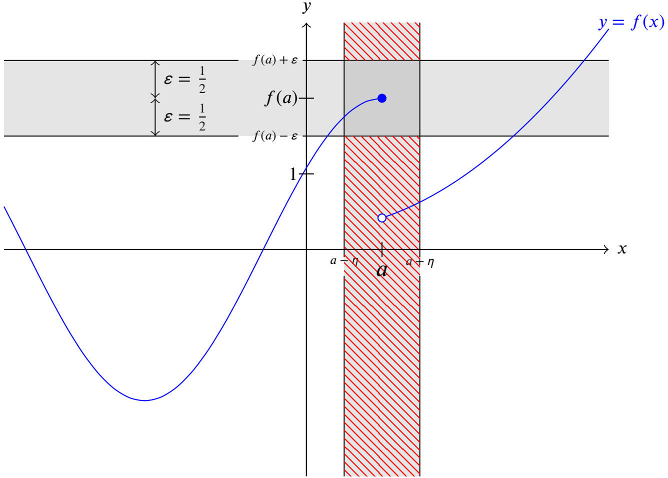



Posons $\varepsilon := \frac{1}{2}$.
Soit $\eta > 0$.

La négation de "$f$ est continue en $a$" est : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$.

# Définition – 2

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous n'est pas continue en $a$ :




Posons $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{2}$.
Soit $\eta > 0$.
Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que
$|x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$.

La négation de "$f$ est continue en $a$" est : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$.

# Premières propriétés

Les propriétés suivantes découlent de celles sur les limites.

## Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in D$.

- Si $f$ et $g$ sont continues en $a$ alors $f + g$ est continue en $a$.
- Si $f$ et $g$ sont continues en $a$ alors $fg$ est continue en $a$.
- Si $f$ et $g$ sont continues en $a$ et si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en $a$.

## Proposition

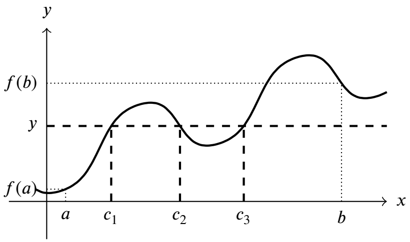
Soient $g : D \to \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$, où $E, D \subset \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) \subset D$.
Si $f$ est continue en $a$ et si $g$ est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en $a$.

# Continuité sur un intervalle : le théorème des valeurs intermédiaires

## Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle et $a, b \in I$ tels que $f(a) \leq f(b)$. Alors

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \exists c \in I, \ f(c) = y.$$




## Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

### Exercice

Montrer que $x^4 - 2x = 100$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet au moins deux solutions.

### Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = 1$ alors $f = 1$ ou $f = -1$.

# Continuité sur un segment : le théorème de Weierstrass

## Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

# Continuité sur un segment : le théorème de Weierstrass

## Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe $c, d \in [a,b]$ tels que

$$\forall x \in [a,b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

## Remarques

- Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

# Continuité sur un segment : le théorème de Weierstrass

## Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

## Remarques

- Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- Combiné avec le TVI : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

# Continuité sur un segment : le théorème de Weierstrass

## Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe $c, d \in [a,b]$ tels que

$$\forall x \in [a,b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

## Remarques

- Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- Combiné avec le TVI : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- **Attention :** cela ne signifie pas que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ ou $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.
  Par exemple, $\sin([0,\pi]) = [0,1]$ mais $[\sin(0), \sin(\pi)] = \{0\}$.

# Continuité sur un segment : le théorème de Weierstrass

## Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe $c, d \in [a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

## Remarques

- Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- Combiné avec le TVI : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- **Attention :** cela ne signifie pas que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ ou $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.
  Par exemple, $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$ mais $[\sin(0), \sin(\pi)] = \{0\}$.
- Si $f$ est continue sur $[a, b]$ alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \beta$ et $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$.

# Continuité sur un segment : le théorème de Weierstrass

## Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe $c, d \in [a,b]$ tels que

$$\forall x \in [a,b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

## Remarques

- Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- Combiné avec le TVI : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- **Attention :** cela ne signifie pas que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ ou $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.
  Par exemple, $\sin([0,\pi]) = [0,1]$ mais $[\sin(0), \sin(\pi)] = \{0\}$.
- Si $f$ est continue sur $[a,b]$ alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \beta$ et $f([a,b]) = [\alpha, \beta]$.
- **Attention :** il ne suffit pas que l'intervalle soit borné ;
  par exemple l'image de $]0,2[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est $]1/2, +\infty[$.