Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

15 mars 2023

Définitions

Définition : EDL2 à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(x) \qquad (E)$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définitions

Définition : EDL2 à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition : solution d'une EDL2 à coefficients constants

Une solution de (E) est une fonction $y : J \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle $J \subset I$ telle que

$$\forall x \in J,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

Définitions

Définition : EDL2 à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition : solution d'une EDL2 à coefficients constants

Une solution de (E) est une fonction $y : J \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle $J \subset I$ telle que

$$\forall x \in J,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

- On dit que (E) est normalisée si $a = 1$.

Définitions

Définition : EDL2 à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition : solution d'une EDL2 à coefficients constants

Une solution de (E) est une fonction $y : J \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle $J \subset I$ telle que

$$\forall x \in J,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

- On dit que (E) est normalisée si $a = 1$.
- On dit que (E) est homogène si elle n'a pas de second membre, i.e. si $d \equiv 0$.

EDL2 homogène – 1

Théorème : EDL2 homogène

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $b, c \in \mathbb{R}$. On considère l'EDL2 homogène suivante

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

On dénote l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ deux fois dérivable } : \forall x \in \mathbb{R},\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \right\},$$

alors :

1. $0 \in \mathcal{S}_0$ (en particulier $\mathcal{S}_0 \neq \varnothing$),
2. Si $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \mathcal{S}_0$,

EDL2 homogène – 1

Théorème : EDL2 homogène

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $b, c \in \mathbb{R}$. On considère l'EDL2 homogène suivante

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

On dénote l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ deux fois dérivable } : \forall x \in \mathbb{R},\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \right\},$$

alors :

1. $0 \in \mathcal{S}_0$ (en particulier $\mathcal{S}_0 \neq \varnothing$),
2. Si $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \mathcal{S}_0$,

La démonstration est similaire au cas des EDL1.

EDL2 homogène – 2

Théorème : solution générale d'une EDL2 homogène

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $b, c \in \mathbb{R}$. On considère l'EDL2 homogène suivante

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

On associe à (E_0) son équation caractéristique, donnée par

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{χ}$$

Notons Δ le discriminant de (χ) et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

1. Si $\Delta > 0$ alors on note r_1, r_2 les deux racines réelles distinctes de (χ) et
$$\mathcal{S}_0 = \left\{\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$
2. Si $\Delta = 0$ alors on note r l'unique racine réelle de (χ) et
$$\mathcal{S}_0 = \left\{(\lambda x + \mu) e^{rx} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$
3. Si $\Delta < 0$ alors on note $r \pm i\omega$ les deux racines complexes conjuguées de (χ), où $r, \omega \in \mathbb{R}$, et
$$\mathcal{S}_0 = \left\{(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))\, e^{rx} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

EDL2 homogène – 3

Démonstration. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
On définit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)e^{-rx}$ alors z est deux fois dérivable et on a

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x)e^{rx}, \\ y'(x) &= z'(x)e^{rx} + rz(x)e^{rx} \text{ et} \\ y''(x) &= z''(x)e^{rx} + 2rz'(x)e^{rx} + r^2z(x)e^{rx}. \end{aligned}$$

Donc

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow az''(x) + (2ar + b)z'(x) + (ar^2 + br + c)z(x) = 0. \tag{1}$$

EDL2 homogène – 3

Démonstration. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
On définit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)e^{-rx}$ alors z est deux fois dérivable et on a

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x)e^{rx}, \\ y'(x) &= z'(x)e^{rx} + rz(x)e^{rx} \text{ et} \\ y''(x) &= z''(x)e^{rx} + 2rz'(x)e^{rx} + r^2 z(x)e^{rx}. \end{aligned}$$

Donc

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow az''(x) + (2ar + b)z'(x) + (ar^2 + br + c)z(x) = 0. \tag{1}$$

1. Si $\Delta = 0$, posons $r := -\frac{b}{2a}$ la racine double de (χ). Alors (1) donne $z''(x) = 0$.
   Donc $z(x) = \lambda x + \mu$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

EDL2 homogène – 3

Démonstration. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
On définit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)e^{-rx}$ alors z est deux fois dérivable et on a

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x)e^{rx}, \\ y'(x) &= z'(x)e^{rx} + rz(x)e^{rx} \text{ et} \\ y''(x) &= z''(x)e^{rx} + 2rz'(x)e^{rx} + r^2 z(x)e^{rx}. \end{aligned}$$

Donc

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow az''(x) + (2ar + b)z'(x) + (ar^2 + br + c)z(x) = 0. \tag{1}$$

1. Si $\Delta = 0$, posons $r := -\frac{b}{2a}$ la racine double de (χ). Alors (1) donne $z''(x) = 0$.
Donc $z(x) = \lambda x + \mu$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Ainsi, la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. Si $\Delta > 0$, posons $r := r_1$. Alors $r_1 \neq \frac{-b}{2a}$ et (1) se réécrit $(z')'(x) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) z'(x) = 0$.
Donc, d'après le cours sur les EDL1, $z'(x) = \lambda e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)x}$ et donc $z(x) = \frac{-\lambda}{2r_1+\frac{b}{a}} e^{-\left(2r_1+\frac{b}{a}\right)x} + \mu$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Ainsi, la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = \frac{-\lambda}{2r_1+\frac{b}{a}} e^{-\left(r_1+\frac{b}{a}\right)x} + \mu e^{r_1 x} = \tilde{\lambda} e^{r_2 x} + \tilde{\mu} e^{r_1 x}$ où $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \in \mathbb{R}$.

EDL2 homogène – 4

3. Si $\Delta < 0$, posons $r \coloneqq \frac{-b}{2a}$ et $\omega \coloneqq \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Alors les deux racines de (χ) sont $r \pm i\omega$ et on a $\frac{ar^2 + br + c}{a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = \omega^2$.

Donc (1) devient

$$z'' + \omega^2 z = 0. \tag{2}$$

EDL2 homogène – 4

3. Si $\Delta < 0$, posons $r \coloneqq \dfrac{-b}{2a}$ et $\omega \coloneqq \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

   Alors les deux racines de (χ) sont $r \pm i\omega$ et on a $\dfrac{ar^2+br+c}{a} = \dfrac{-b^2+4ac}{4a^2} = \omega^2$.

   Donc (1) devient
$$z'' + \omega^2 z = 0. \tag{2}$$

Lemme

La solution générale de (2) sur $\mathbb{R}$ est de la forme $z(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Si $\Delta < 0$, posons $r := \dfrac{-b}{2a}$ et $\omega := \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Alors les deux racines de (χ) sont $r \pm i\omega$ et on a $\dfrac{ar^2 + br + c}{a} = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = \omega^2$.

Donc (1) devient

$$z'' + \omega^2 z = 0. \tag{2}$$

On déduit du lemme suivant que la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = e^{rx}\left(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)\right)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ■

Lemme

La solution générale de (2) sur $\mathbb{R}$ est de la forme $z(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Si $\Delta < 0$, posons $r := \dfrac{-b}{2a}$ et $\omega := \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

   Alors les deux racines de (χ) sont $r \pm i\omega$ et on a $\dfrac{ar^2 + br + c}{a} = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = \omega^2$.

   Donc (1) devient
   $$z'' + \omega^2 z = 0. \tag{2}$$

   On déduit du lemme suivant que la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est
   $y(x) = e^{rx}\left(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)\right)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

Lemme

La solution générale de (2) sur $\mathbb{R}$ est de la forme $z(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On vérifie aisément que $z(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ est solution de (2).

EDL2 homogène – 4

3. Si $\Delta < 0$, posons $r := \dfrac{-b}{2a}$ et $\omega := \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
   Alors les deux racines de (χ) sont $r \pm i\omega$ et on a $\dfrac{ar^2 + br + c}{a} = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = \omega^2$.
   Donc (1) devient
   $$z'' + \omega^2 z = 0. \tag{2}$$
   On déduit du lemme suivant que la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est
   $y(x) = e^{rx}\left(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)\right)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ■

Lemme

La solution générale de (2) sur $\mathbb{R}$ est de la forme $z(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On vérifie aisément que $z(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ est solution de (2).

Réciproquement, soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (2).
Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = z(x) - z(0)\cos(\omega x) - z'(0)\sin(\omega x)$ alors f est solution de (2).
Donc $f'f'' + \omega^2 f'f = 0$ d'où, en intégrant et en utilisant que $f(0) = f'(0) = 0$, $(f')^2 + \omega^2(f)^2 = 0$.
Ainsi $f \equiv 0$, i.e. $z(x) = z(0)\cos(\omega x) + z'(0)\sin(\omega x)$, ce qui démontre le lemme. ■

EDL2 avec second membre – 1

Théorème

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL2

$$ay'' + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

EDL2 avec second membre – 1

Théorème

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL2

$$ay'' + by' + cy = d(x) \qquad (E)$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (E_0)$$

Alors

1. $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{S},\ y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$

EDL2 avec second membre – 1

Théorème

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL2

$$ay'' + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

Alors

1. $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{S},\ y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$
2. $\forall y \in \mathcal{S},\ \forall y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y + y_0 \in \mathcal{S}$

Théorème

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL2

$$ay" + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$ay" + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

Alors

1. $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{S},\ y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$
2. $\forall y \in \mathcal{S},\ \forall y_0 \in \mathcal{S}_0,\ y + y_0 \in \mathcal{S}$

Démonstration.

1. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$. Alors $a(y_1 - y_2)" + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) = (ay_1" + by_1' + cy_1) - (ay_2" + by_2' + cy_2) = d - d = 0$.
Donc $y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0$.
2. Soient $y \in \mathcal{S}$ et $y_0 \in \mathcal{S}_0$ alors $a(y + y_0)" + b(y + y_0)' + c(y + y_0) = (ay" + by' + cy) + (ay_0" + by_0' + cy_0) = d + 0 = d$.
Donc $y + y_0 \in \mathcal{S}$. ∎

EDL2 avec second membre – 2

Corollaire

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL2

$$ay'' + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S} = \left\{ y_p + y_0 \ : \ y_0 \in \mathcal{S}_0 \right\}$.

EDL2 avec second membre – 2

Corollaire

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL2

$$ay'' + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S} = \left\{ y_p + y_0 \ : \ y_0 \in \mathcal{S}_0 \right\}$.

Démonstration.

- $\subset$ Soit $y \in \mathcal{S}$ alors $y = y_p + y_0$ où $y_0 = y - y_p \in \mathcal{S}_0$.
- $\supset$ Soit $y_0 \in \mathcal{S}_0$ alors $y_p + y_0 \in \mathcal{S}$. ■

EDL2 avec second membre – 2

Corollaire

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On dénote par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de l'EDL2

$$ay'' + by' + cy = d(x) \tag{E}$$

et par $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_0}$$

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S} = \left\{ y_p + y_0 \ : \ y_0 \in \mathcal{S}_0 \right\}$.

Démonstration.

- $\subset$ Soit $y \in \mathcal{S}$ alors $y = y_p + y_0$ où $y_0 = y - y_p \in \mathcal{S}_0$.
- $\supset$ Soit $y_0 \in \mathcal{S}_0$ alors $y_p + y_0 \in \mathcal{S}$. ■

En pratique, on retiendra que

Solution générale de (E) = Solution particulière de (E) + Solution générale de (E_0).

Second membre de la forme polynôme–exponentielle

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$.
On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{sx} \tag{E}$$

de la forme $y_p(x) = Q(x)e^{sx}$ où $Q \in \mathbb{R}[x]$.
Alors

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = P(x)e^{sx} \Leftrightarrow aQ'' + (2as + b)Q' + (as^2 + bs + c)Q = P$$

1. Si s n'est pas racine de l'équation caractéristique (χ).
   Alors $as^2 + bs + c \neq 0$ et il existe un tel Q vérifiant $\deg Q = \deg P$.
2. Si s est racine simple de l'équation caractéristique (χ).
   On obtient alors $aQ'' + (2as + b)Q' = P$ avec $2as + b \neq 0$.
   Donc il existe un tel Q vérifiant $\deg Q = \deg P + 1$ et $Q(0) = 0$ (i.e. sans terme constant).
3. Si s est racine double de l'équation caractéristique (χ).
   On obtient alors $aQ'' = P$.
   Donc il existe un tel Q vérifiant $\deg Q = \deg P + 2$, $Q(0) = 0$ et $Q'(0) = 0$ (i.e. sans terme constant et sans terme de degré 1).