

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE



16 février 2023

Définition : EDL1

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$\alpha y' + \beta y = \gamma \quad (E)$$

où $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition : EDL1

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$\alpha y' + \beta y = \gamma \quad (E)$$

où $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition : solution d'une EDL1

Une solution de (E) est une fonction $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle $J \subset I$ telle que

$$\forall x \in J, \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x).$$

Définition : EDL1

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$\alpha y' + \beta y = \gamma \quad (E)$$

où $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition : solution d'une EDL1

Une solution de (E) est une fonction $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle $J \subset I$ telle que

$$\forall x \in J, \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x).$$

- On dit que l'EDL1 (E) est normalisée si $\alpha \equiv 1$.

Définition : EDL1

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$\alpha y' + \beta y = \gamma \quad (E)$$

où $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition : solution d'une EDL1

Une solution de (E) est une fonction $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle $J \subset I$ telle que

$$\forall x \in J, \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x).$$

- On dit que l'EDL1 (E) est normalisée si $\alpha \equiv 1$.
- On dit que l'EDL1 (E) est homogène si elle n'a pas de second membre, i.e. si $\gamma \equiv 0$.

Théorème : EDL1 homogène et normalisée

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

Considérons l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ sur I ,

$$S_0 := \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = 0\},$$

alors :

Théorème : EDL1 homogène et normalisée

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

Considérons l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ sur I ,

$$S_0 := \{ y : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = 0 \},$$

alors :

- ❶ $0 \in S_0$ (en particulier $S_0 \neq \emptyset$),
- ❷ Si $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S_0$,

Théorème : EDL1 homogène et normalisée

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

Considérons l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ sur I ,

$$S_0 := \{ y : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = 0 \},$$

alors :

- ❶ $0 \in S_0$ (en particulier $S_0 \neq \emptyset$),
- ❷ Si $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S_0$,

(On dit que S_0 est un espace vectoriel réel)

Théorème : EDL1 homogène et normalisée

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

Considérons l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ sur I ,

$$S_0 := \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = 0\},$$

alors :

- ❶ $0 \in S_0$ (en particulier $S_0 \neq \emptyset$),
- ❷ Si $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S_0$,

(On dit que S_0 est un espace vectoriel réel)

- ❸ Soit A une primitive de a alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \lambda e^{-A(x)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Théorème : EDL1 homogène et normalisée

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

Considérons l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ sur I ,

$$S_0 := \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = 0\},$$

alors :

- ❶ $0 \in S_0$ (en particulier $S_0 \neq \emptyset$),
- ❷ Si $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S_0$,

(On dit que S_0 est un espace vectoriel réel)

- ❸ Soit A une primitive de a alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \lambda e^{-A(x)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On rappelle que a admet une primitive d'après le théorème fondamental de l'analyse...

EDL1 homogène et normalisée – 2

Démonstration :

EDL1 homogène et normalisée – 2

Démonstration :

① $\forall x \in I, 0 + a(x)0 = 0.$

Démonstration :

① $\forall x \in I, 0 + a(x)0 = 0.$

② Soient $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $y := \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est dérivable par opérations élémentaires sur des fonctions dérivables et

$$y' + ay = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + a\lambda_1 y_1 + a\lambda_2 y_2 = \lambda_1(y_1' + ay_1) + \lambda_2(y_2' + ay_2) = 0.$$

Donc $y \in S_0$.

Démonstration :

① $\forall x \in I, 0 + a(x)0 = 0.$

- ② Soient $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $y := \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est dérivable par opérations élémentaires sur des fonctions dérivables et

$$y' + ay = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + a\lambda_1 y_1 + a\lambda_2 y_2 = \lambda_1 (y_1' + ay_1) + \lambda_2 (y_2' + ay_2) = 0.$$

Donc $y \in S_0$.

- ③ Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Définissons $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)e^{A(x)}$. Alors $z'(x) = y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)}$.
D'où

$$y \in S_0 \Leftrightarrow z' = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, z \equiv \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{-A(x)}$$

Théorème : EDL1 normalisée

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

On dénote par S l'ensemble des solutions sur I de l'EDL1

$$y' + ay = b \quad (E)$$

et par S_0 l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0. \quad (E_0)$$

Théorème : EDL1 normalisée

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

On dénote par S l'ensemble des solutions sur I de l'EDL1

$$y' + ay = b \quad (E)$$

et par S_0 l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0. \quad (E_0)$$

Alors

① $S \neq \emptyset$

Théorème : EDL1 normalisée

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

On dénote par S l'ensemble des solutions sur I de l'EDL1

$$y' + ay = b \quad (E)$$

et par S_0 l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0. \quad (E_0)$$

Alors

- 1 $S \neq \emptyset$
- 2 $\forall y_1, y_2 \in S, y_1 - y_2 \in S_0$

Théorème : EDL1 normalisée

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

On dénote par S l'ensemble des solutions sur I de l'EDL1

$$y' + ay = b \quad (E)$$

et par S_0 l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0. \quad (E_0)$$

Alors

- ❶ $S \neq \emptyset$
- ❷ $\forall y_1, y_2 \in S, y_1 - y_2 \in S_0$
- ❸ $\forall y \in S, \forall y_0 \in S_0, y + y_0 \in S$

On dit que S est un espace affine réel.

Démonstration :

Démonstration :

- ① Soient A une primitive de a sur I et λ une primitive de be^A sur I .

Définissons $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, alors y est dérivable sur I et

$$y'(x) + a(x)y(x) = \lambda'(x)e^{-A(x)} - \lambda(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x)e^{A(x)}e^{-A(x)} = b(x).$$

Donc $y \in S$, et ainsi $S \neq \emptyset$.

Démonstration :

- ① Soient A une primitive de a sur I et λ une primitive de be^A sur I .

Définissons $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, alors y est dérivable sur I et

$$y'(x) + a(x)y(x) = \lambda'(x)e^{-A(x)} - \lambda(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x)e^{A(x)}e^{-A(x)} = b(x).$$

Donc $y \in S$, et ainsi $S \neq \emptyset$.

- ② Soient $y_1, y_2 \in S$. Alors

$$(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = (y_1' + ay_1) - (y_2' + ay_2) = b - b = 0.$$

Donc $y_1 - y_2 \in S_0$.

Démonstration :

- ① Soient A une primitive de a sur I et λ une primitive de be^A sur I .
Définissons $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, alors y est dérivable sur I et

$$y'(x) + a(x)y(x) = \lambda'(x)e^{-A(x)} - \lambda(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x)e^{A(x)}e^{-A(x)} = b(x).$$

Donc $y \in S$, et ainsi $S \neq \emptyset$.

- ② Soient $y_1, y_2 \in S$. Alors

$$(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = (y_1' + ay_1) - (y_2' + ay_2) = b - b = 0.$$

Donc $y_1 - y_2 \in S_0$.

- ③ Soient $y \in S$ et $y_0 \in S_0$ alors

$$(y + y_0)' + a(y + y_0) = (y' + ay) + (y_0' + ay_0) = b + 0 = b.$$

Donc $y + y_0 \in S$. ■

Corollaire

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

On dénote par S l'ensemble des solutions sur I de l'EDL1

$$y' + ay = b \tag{E}$$

et par S_0 l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0. \tag{E_0}$$

Soit $y_p \in S$ alors $S = \{y_p + y_0 : y_0 \in S_0\}$.

Corollaire

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

On dénote par S l'ensemble des solutions sur I de l'EDL1

$$y' + ay = b \quad (E)$$

et par S_0 l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0. \quad (E_0)$$

Soit $y_p \in S$ alors $S = \{y_p + y_0 : y_0 \in S_0\}$.

Démonstration.

- ⊂ Soit $y \in S$ alors $y = y_p + y_0$ où $y_0 = y - y_p \in S_0$.
- ⊃ Soit $y_0 \in S_0$ alors $y_p + y_0 \in S$.



Corollaire

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

On dénote par S l'ensemble des solutions sur I de l'EDL1

$$y' + ay = b \quad (E)$$

et par S_0 l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0. \quad (E_0)$$

Soit $y_p \in S$ alors $S = \{y_p + y_0 : y_0 \in S_0\}$.

Démonstration.

⊂ Soit $y \in S$ alors $y = y_p + y_0$ où $y_0 = y - y_p \in S_0$.

⊃ Soit $y_0 \in S_0$ alors $y_p + y_0 \in S$. ■

En pratique, on retiendra que

Solution générale de (E) = Solution particulière de (E) + Solution générale de (E_0) .

Comment déterminer une solution particulière en pratique ?

- 1 Recherche d'une solution évidente : on regarde l'équation droit dans les yeux.
- 2 Superposition des solutions : si y_{p_1} est une solution particulière de $y' + ay = b_1$ et si y_{p_2} est une solution particulière de $y' + ay = b_2$ alors $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ est une solution particulière de $y' + ay = b_1 + b_2$.
- 3 Méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$ où A est une primitive de a (i.e. on remplace la constante de la solution générale de l'équation homogène associée par une fonction).
Cette méthode est justifiée par le premier point de la diapositive 6.

Exemples

Résoudre les EDL1 suivantes :

- ❶ $y' + xy = x$ sur $\mathbb{R}$
- ❷ $y' + y = 2e^x + 4 \sin(x) + 3 \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
- ❸ $y' + \frac{2 - 3x^2}{x^3} y = 1$ sur $]0, +\infty[$

Problème de Cauchy – 1

Théorème : problème de Cauchy (existence et unicité)

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Alors l'EDL1 normalisée $y' + ay = b$ admet une unique solution sur I telle que $y(x_0) = y_0$.

Théorème : problème de Cauchy (existence et unicité)

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Alors l'EDL1 normalisée $y' + ay = b$ admet une unique solution sur I telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration : Puisque a est continue sur l'intervalle I , elle admet une primitive $A : I \rightarrow \mathbb{R}$.

D'après les résultats des diapositives 7, 5 et 3, l'EDL1 $y' + ay = b$ admet une solution $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ et alors la solution générale de cette équation sur I est donnée par

$$y(x) = y_p(x) + \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puis

$$y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow y_0 = y_p(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} \Leftrightarrow \lambda = (y_0 - y_p(x_0)) e^{A(x_0)}.$$



Problème de Cauchy – 1

Théorème : problème de Cauchy (existence et unicité)

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Alors l'EDL1 normalisée $y' + ay = b$ admet une unique solution sur I telle que $y(x_0) = y_0$.

Remarque

On appelle *problème de Cauchy* la donnée d'une EDL1 avec une condition initiale :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Problème de Cauchy – 2

Définition : courbe intégrale

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

Le graphe d'une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ d'une EDL1 $y' + ay = b$ s'appelle *courbe intégrale*.

Problème de Cauchy – 2

Définition : courbe intégrale

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

Le graphe d'une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ d'une EDL1 $y' + ay = b$ s'appelle *courbe intégrale*.

L'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy peut se reformuler ainsi :
étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique courbe intégrale passant par (x_0, y_0) .

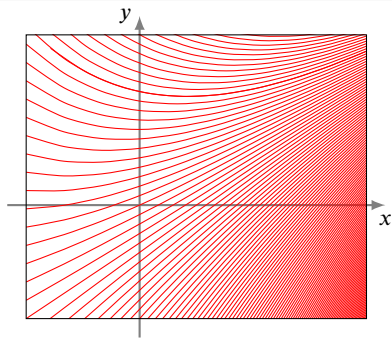
Problème de Cauchy – 2

Définition : courbe intégrale

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

Le graphe d'une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ d'une EDL1 $y' + ay = b$ s'appelle *courbe intégrale*.

L'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy peut se reformuler ainsi : étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique courbe intégrale passant par (x_0, y_0) .



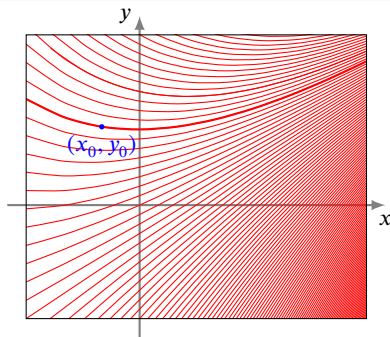
Problème de Cauchy – 2

Définition : courbe intégrale

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

Le graphe d'une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ d'une EDL1 $y' + ay = b$ s'appelle *courbe intégrale*.

L'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy peut se reformuler ainsi : étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique courbe intégrale passant par (x_0, y_0) .



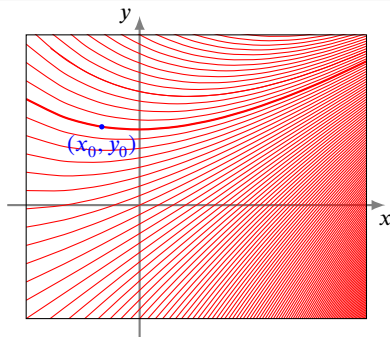
Problème de Cauchy – 2

Définition : courbe intégrale

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I .

Le graphe d'une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ d'une EDL1 $y' + ay = b$ s'appelle *courbe intégrale*.

L'existence et l'unicité d'une solution d'un problème de Cauchy peut se reformuler ainsi : étant donnés $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique courbe intégrale passant par (x_0, y_0) .



Autrement dit,

- $I \times \mathbb{R}$ est recouvert par les courbes intégrales de l'EDL1 considérée ;
- Deux courbes intégrales distinctes ne s'intersectent pas.