Développements limités

5 janvier 2023

Définition

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un *développement limité d'ordre n en a*, noté $DL_n(a)$, s'il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

ou, de façon équivalente via le changement de variable $h = x - a$, tels que

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots \alpha_n h^n + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un *développement limité d'ordre n en a*, noté $DL_n(a)$, s'il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{\underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)}_{\text{Reste}}$$

ou, de façon équivalente via le changement de variable $h = x - a$, tels que

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots \alpha_n h^n + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Définition

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un *développement limité d'ordre n en a*, noté $DL_n(a)$, s'il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)}_{\text{Reste}}$$

ou, de façon équivalente via le changement de variable $h = x - a$, tels que

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots \alpha_n h^n + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

On remarque aisément que si f admet un développement limité en a alors $\alpha_0 = f(a)$.

Unicité

Proposition

Si f admet un développement limité d'ordre n en a alors il est unique.

Unicité

Proposition

Si f admet un développement limité d'ordre n en a alors il est unique.

Démonstration.
Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q de degrés au plus n tels que

$$f(a+h) = P(h) + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \qquad \text{et} \qquad f(a+h) = Q(h) + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right).$$

Alors $P(h) - Q(h) = \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$ et $P-Q$ est un polynôme de degré au plus n, donc $P - Q = 0$. ∎

Unicité

Proposition

Si f admet un développement limité d'ordre n en a alors il est unique.

Démonstration.
Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q de degrés au plus n tels que

$$f(a+h) = P(h) + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \qquad \text{et} \qquad f(a+h) = Q(h) + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right).$$

Alors $P(h) - Q(h) = \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$ et $P-Q$ est un polynôme de degré au plus n, donc $P-Q=0$. ∎

La partie régulière du $DL_n(a)$ d'une fonction, si elle existe, est la meilleure approximation de f au voisinage de a par un polynôme de degré au plus n.

Exemples

Exemple

Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + 17x + 42x^2 + 64x^3$ alors :

1. f admet le $DL_2(0)$ suivant : $f(x) = 1 + 17x + 42x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.
2. f admet un $DL_2(1)$ suivant : $f(x) = 124 + 293(x-1) + 234(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)$.

   En effet,
   $$\begin{aligned} f(1+h) &= 1 + 17(1+h) + 42(1+h)^2 + 64(1+h)^3 \\ &= 1 + 17(1+h) + 42(1+2h+h^2) + 64(1+3h+3h^2+h^3) \\ &= 124 + 293h + 234h^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right) \end{aligned}$$

Exemples

Exemple

Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + 17x + 42x^2 + 64x^3$ alors :

1. f admet le $DL_2(0)$ suivant : $f(x) = 1 + 17x + 42x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.
2. f admet un $DL_2(1)$ suivant : $f(x) = 124 + 293(x-1) + 234(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)$.

   En effet,
   $$\begin{aligned} f(1+h) &= 1 + 17(1+h) + 42(1+h)^2 + 64(1+h)^3 \\ &= 1 + 17(1+h) + 42(1+2h+h^2) + 64(1+3h+3h^2+h^3) \\ &= 124 + 293h + 234h^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right) \end{aligned}$$

Exemple

Considérons $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ alors f admet le $DL_n(0)$ suivant :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

En effet,

$$\forall x \in]-1,1[, \ f(x) = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \frac{x}{1-x}$$

Motivation : application au calcul de limites

Exercice

En utilisant le formulaire à la fin de la feuille de TD, calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\arctan(x) - x}$$

Premières propriétés – 1

Proposition

f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a.

Premières propriétés – 1

Proposition

f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a.

Démonstration. f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si $f(x) = f(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$. ∎

Premières propriétés – 1

Proposition

f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a.

Démonstration. f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si $f(x) = f(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$. ∎

Proposition

f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a.
Dans ce cas, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$,
ou, de façon équivalente, $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h \to 0}{o}(h)$.

Premières propriétés – 1

Proposition

f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a.

Démonstration. f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si $f(x) = f(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$. ∎

Proposition

f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a.
Dans ce cas, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$,
ou, de façon équivalente, $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h \to 0}{o}(h)$.

Démonstration.
f admet un $DL_1(a)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(a+h) = f(a) + \alpha h + \underset{h \to 0}{o}(h)$,

i.e. si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha$. ∎

Premières propriétés – 2

ATTENTION !!!

Les résultats précédents ne se généralisent pas pour $n \geq 2$:

- Une fonction peut admettre un $DL_2(a)$ sans être deux fois dérivable en a (cf exemple ci-dessous).

Premières propriétés – 2

ATTENTION !!!

Les résultats précédents ne se généralisent pas pour $n \geq 2$:

- Une fonction peut admettre un $DL_2(a)$ sans être deux fois dérivable en a (cf exemple ci-dessous).

Contre-exemple

Considerons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Alors $f(x) = 0 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ mais f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Premières propriétés – 2

ATTENTION !!!

Les résultats précédents ne se généralisent pas pour $n \geq 2$:

- Une fonction peut admettre un $DL_2(a)$ sans être deux fois dérivable en a (cf exemple ci-dessous).
- Néanmoins, la réciproque se généralise : on verra plus loin (théorème de Taylor–Young) que si une fonction est n fois dérivable en a alors elle admet un $DL_n(a)$.

Contre-exemple

Considerons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Alors $f(x) = 0 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$ mais f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Opérations sur les développements limités – 1

Proposition : combinaison linéaire et produit

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I, $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ et $g(x) = Q(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$, où P et Q sont deux polynômes de degrés au plus n, alors

1. $\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x-a) + \mu Q(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$,
2. $f(x)g(x) = S(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ où S est la troncation de PQ aux termes de degrés $\leq n$.

Opérations sur les développements limités – 1

Proposition : combinaison linéaire et produit

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I, $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ et $g(x) = Q(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$, où P et Q sont deux polynômes de degrés au plus n, alors

1. $\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x-a) + \mu Q(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$,
2. $f(x)g(x) = S(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ où S est la troncation de PQ aux termes de degrés $\leq n$.

Exemple

On souhaite déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \sin(x)\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\
&= x - \frac{2}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Opérations sur les développements limités – 2

Proposition : composition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ définies sur deux intervalles I et J telles que $\mathrm{Im}(f) \subset J$ et $a \in I$.
Si $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ et $g(x) = Q(x - f(a)) + \underset{x\to a}{o}((x-f(a))^n)$ alors

$$g(f(x)) = S(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

où S est la troncation de $Q \circ (P - P(0))$ aux termes de degrés $\leq n$.

Opérations sur les développements limités – 2

Proposition : composition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ définies sur deux intervalles I et J telles que $\mathrm{Im}(f) \subset J$ et $a \in I$.
Si $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ et $g(x) = Q(x - f(a)) + \underset{x\to a}{o}((x-f(a))^n)$ alors

$$g(f(x)) = S(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

où S est la troncation de $Q \circ (P - P(0))$ aux termes de degrés $\leq n$.

Exemple

On souhaite déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \cos(\sin(x))$:

$$\begin{aligned}
\cos(\sin(x)) &= \cos\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^3\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Opérations sur les développements limités – 3

Remarque : quotient

La proposition précédente est utile pour calculer le développement limité d'un quotient.
En effet, soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$, alors

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(a)} \frac{1}{1 + \frac{f(x)-f(a)}{f(a)}} = \frac{1}{f(a)} g(\tilde{f}(x))$$

où $g(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{f(a)} - 1$.

Opérations sur les développements limités – 3

Remarque : quotient

La proposition précédente est utile pour calculer le développement limité d'un quotient.
En effet, soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$, alors

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(a)} \frac{1}{1 + \frac{f(x)-f(a)}{f(a)}} = \frac{1}{f(a)} g(\tilde{f}(x))$$

où $g(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{f(a)} - 1$.

Exemple

On souhaite déterminer le $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{1+x^2}{\cos(x)}$:

$$\frac{1+x^2}{\cos(x)} = \frac{1+x^2}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)} = \left(1+x^2\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)$$

$$= \left(1+x^2\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$$

Opérations sur les développements limités – 4

Proposition : primitivation

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I admettant le $DL_n(a)$ suivant :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ et

$$F(x) = F(a) + \alpha_0(x-a) + \frac{\alpha_1}{2}(x-a)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Opérations sur les développements limités – 4

Proposition : primitivation

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I admettant le $DL_n(a)$ suivant :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ et

$$F(x) = F(a) + \alpha_0(x-a) + \frac{\alpha_1}{2}(x-a)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Démonstration. Considérons la fonction $R : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$R(x) = F(x) - \left(F(a) + \alpha_0(x-a) + \frac{\alpha_1}{2}(x-a)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1}(x-a)^{n+1}\right)$$

alors $R'(x) = f(x) - \left(\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n\right)$.
On sait que R et $\varphi : x \mapsto (x-a)^{n+1}$ sont dérivables au voisinage de a, que $\lim\limits_{x\to a} R(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, que $\varphi'(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a privé de a et que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R'(x)}{\varphi'(x)} = 0$ (car $R'(x) = \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$).
Donc, d'après le théorème de L'Hôpital, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$, i.e. $R(x) = \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$. ■

Opérations sur les développements limités – 4

Proposition : primitivation

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I admettant le $DL_n(a)$ suivant :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ et

$$F(x) = F(a) + \alpha_0(x-a) + \frac{\alpha_1}{2}(x-a)^2 + \frac{\alpha_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

On peut simplement retenir que si $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ où P est un polynôme de degré $\leq n$ alors

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x P(t-a)dt + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Opérations sur les développements limités – 4bis

Exemple

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-1}\right),$$

donc

$$-\ln(1-x) = \ln(1) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Ainsi, on a

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Exemple

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-1}\right),$$

donc

$$-\ln(1-x) = \ln(1) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Ainsi, on a

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Exercice

Déterminer le $DL_{2n+1}(0)$ de arctan.

Opérations sur les développements limités – 5

Proposition : dérivation

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I admettant le $DL_{n+1}(a)$ suivant :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_{n+1}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Si f est dérivable et **si f' admet un $DL_n(a)$** alors

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \cdots + (n+1)\alpha_{n+1}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

Opérations sur les développements limités – 5

Proposition : dérivation

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I admettant le $DL_{n+1}(a)$ suivant :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_{n+1}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Si f est dérivable et **si** f' **admet un** $DL_n(a)$ alors

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \cdots + (n+1)\alpha_{n+1}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition de primitivation à f'. ■

Opérations sur les développements limités – 5

Proposition : dérivation

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I admettant le $DL_{n+1}(a)$ suivant :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_{n+1}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Si f est dérivable et **si** f' **admet un** $DL_n(a)$ alors

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \cdots + (n+1)\alpha_{n+1}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition de primitivation à f'. ∎

On peut simplement retenir que si f admet un $DL_{n+1}(a)$ et que si f' admet un $DL_n(a)$ alors le développement limité de f' s'obtient en dérivant celui de f terme à terme.

Opérations sur les développements limités – 5

Proposition : dérivation

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I admettant le $DL_{n+1}(a)$ suivant :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_{n+1}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Si f est dérivable et **si** f' **admet un** $DL_n(a)$ alors

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + \cdots + (n+1)\alpha_{n+1}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition de primitivation à f'. ∎

On peut simplement retenir que si f admet un $DL_{n+1}(a)$ et que si f' admet un $DL_n(a)$ alors le développement limité de f' s'obtient en dérivant celui de f terme à terme.

Attention

L'hypothèse que f' admet un $DL_n(a)$ est importante : il est possible que f admette un $DL_{n+1}(a)$ et que f soit dérivable mais que f' n'admette pas de $DL_n(a)$; voir l'exercice 14 de la feuille de TD.

Théorème de Taylor–Young – 1

Théorème de Taylor–Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f est n fois dérivable[a] en a alors f admet un $DL_n(a)$ et

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

ou, de façon équivalente,

$$f(a+h) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

[a] En particulier, il existe $\eta > 0$ tel que f est $n-1$ fois dérivable sur $[a-\eta, a+\eta] \cap I$.

Théorème de Taylor–Young – 1

Théorème de Taylor–Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f est n fois dérivable[a] en a alors f admet un $DL_n(a)$ et

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

ou, de façon équivalente,

$$f(a+h) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

[a] En particulier, il existe $\eta > 0$ tel que f est $n-1$ fois dérivable sur $[a-\eta, a+\eta] \cap I$.

Démonstration. On a déjà vu que l'énoncé était vrai pour $n = 0$ ou $n = 1$.
Supposons l'énoncé vrai pour un certain $n \geq 1$ et montrons le pour $n+1$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I qui est $n+1$ fois dérivable en $a \in I$.
Alors, puisque $n+1 \geq 2$, f est dérivable au voisinage de a et f' est n fois dérivable en a.
Donc, par hypothèse de récurrence, $f'(x) = \frac{f'(a)}{0!} + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.
D'après le théorème de primitivation, on obtient alors que

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

∎

Théorème de Taylor–Young – 2

Exercices

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, exp admet un $DL_n(0)$ et que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right).$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, cos admet un $DL_{2n+1}(0)$ et que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, sin admet un $DL_{2n+2}(0)$ et que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}.$$

Développements limités usuels en 0

- $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$
- $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$
- $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \cdots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$

TODO : Taylor reste intégral et applications