Université d'Angers – 2022/2023

Analyse Élémentaire

Contrôle continu

du 10 octobre 2022.

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone,...) n'est autorisé.

Exercice 1.

Pour chacune des expressions suivantes, déterminer l'ensemble des valeurs $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles elle est bien définie.

(1) $\sqrt{5-7x}$ (2) $\ln\left(\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+4)}\right)$

Exercice 2.

(1) Calculer, si elle existe, la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3x^2}{xe^x+x}$.

(2) Calculer, si elle existe, la limite $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$.

Exercice 3.

(1) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{14}$, est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(2) On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 - x - 3$.

  (a) Déterminer l'image de g et esquisser son graphe.

  (b) Déterminer la plus grande valeur de $a \in \mathbb{R}$ pour laquelle la fonction $h :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(x)$ est injective.

  (c) Résoudre l'inégalité $|x| > x^2 - x - 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

(1) En admettant que $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x \sin(e^{-x})$.

(2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3\sin(x^2) - 7\cos(x^3)}{7x}$.

(3) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$.

Exercice 5.

(1) Soit $f : A \to B$ une fonction où $A, B \subset \mathbb{R}$.
Exprimer "f est décroissante", si possible à l'aide de quantificateurs ou, à defaut, de façon rigoureuse en termes usuels.

(2) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions décroissantes alors la composition $g \circ f$ est croissante.

Exercice 6. *Les étudiants du groupe MPC4 ne doivent pas faire cette question !*

On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1+x^4} + \sqrt{x}$.

(1) La fonction f est-elle majorée ?

(2) La fonction f est-elle minorée ?

Quelques commentaires suite à la correction des copies :

— Avant d'utiliser une variable, il faut l'introduire (e.g. *"Soit $x \in \mathbb{R}$"*)... Ce n'est pas au correcteur de deviner quelle est cette variable (i.e. *qui est x ? un réel quelconque ? un complexe ? une fonction ?*)...

— Attention à l'utilisation des quantificateurs.
Ils apparaissent dans un énoncé (e.g. *"$\forall x \in \mathbb{R},\ x < -1 \Rightarrow x^2 > 1$"*) mais généralement pas dans une démonstration.
Dans votre démonstration, il faut fixer un $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse de l'implication (ici "$x < -1$") et en déduire la conclusion (ici "$x^2 > 1$").
Donc votre démonstration commence généralement par *"Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x < -1$"*.
Vous ne pouvez pas écrire *"$\forall x \in \mathbb{R},\ x < -1$"* pour introduire la variable x dans votre démonstration :

(1) Ça se lit "pour tout $x \in \mathbb{R}$", ce qui n'introduit pas x.

(2) Ensuite, une variable quantifiée est liée/muette : elle n'a de sens que dans l'énoncé quantifié et on peut remplacer toutes ses occurrences par une autre lettre sans changer le sens de l'énoncé.

— Résoudre une équation revient à démontrer une équivalence.
Par exemple "Résoudre l'équation $9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0$ d'inconnue $n \in \mathbb{Z}$" signifie qu'il faut déterminer l'ensemble $S = \{n \in \mathbb{Z} \ :\ 9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0\}$, autrement dit qu'il faut trouver un ensemble $S \subset \mathbb{Z}$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z},\ 9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0 \Leftrightarrow n \in S$ (*remarquez l'équivalence*).
Il n'est donc pas suffisant de raisonner par implications.
En effet, si vous trouvez un ensemble $S \subset \mathbb{Z}$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z},\ 9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0 \implies n \in S$, cela signifie que si $n \in \mathbb{Z}$ est une solution alors $n \in S$; mais il se peut que des éléments de S ne soient pas solutions.
Dans certains cas, il est plus facile de raisonner par implications, mais, alors, il faut vérifier quels éléments de l'ensemble obtenu sont réellement solutions. C'est ce que l'on appelle un raisonnement par *analyse-synthèse*.

Exemple. On souhaite résoudre l'équation $9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0$ d'inconnue $n \in \mathbb{Z}$.
- *Analyse.* Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0$ alors $n(9n^4 - 12n^3 + 6) = 5$ et donc $n|5$.
  Donc si $n \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation alors $n \in \{-5, -1, 1, 5\}$.
- *Synthèse.*
  - $9 \cdot (-5)^5 - 12 \cdot (-5)^4 + 6 \cdot (-5) - 5 = -35660$
  - $9 \cdot (-1)^5 - 12 \cdot (-1)^4 + 6 \cdot (-1) - 5 = -32$
  - $9 \cdot 1^5 - 12 \cdot 1^4 + 6 \cdot 1 - 5 = -2$
  - $9 \cdot 5^5 - 12 \cdot 5^4 + 6 \cdot 5 - 5 = 20650$
- *Conclusion.* L'équation $9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0$ n'admet pas de solution $n \in \mathbb{Z}$.

— D'ailleurs, il faut préciser si vous raisonnez par suite d'équivalences, d'implications, d'égalités, ou autre…Ce n'est pas au correcteur de deviner.
Vous pouvez utiliser des symboles ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) ou des mots ("si …alors …", "donc", "d'où", "ainsi", "si et seulement si", …) mais vous ne pouvez pas écrire une liste d'expressions algébriques sans préciser comment elles sont liées les unes aux autres (comme on l'a vu dans le point précédent, c'est important).

— Pour les calculs des limites, il faut se ramener aux propriétés du cours ("opérations élémentaires sur les limites").
On **ne** peut **pas** écrire *"$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+3x^2e^{-x}}{x+xe^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$"*.
En effet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2+x} \neq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ même si $x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (la première limite n'existe pas et la deuxième est $+\infty$).
La bonne justification pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+3x^2e^{-x}}{x+xe^{-x}} = 0$ est que le numérateur tend vers 1 et que le dénominateur tend vers $+\infty$.

— Si vous ne savez pas comment commencer votre démonstration, il peut être utile d'écrire au brouillon les hypothèses (que suppose-t-on ?) et ce que l'on souhaite démontrer.
Pour les implications, il est possible qu'il soit plus facile de passer par la contraposée. Et le raisonnement par l'absurde peut aussi être utile dans certains cas. Il faut essayer…

Solution 1.

(1) On sait que $\sqrt{u}$ est bien définie pour $u \in [0, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $5 - 7x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{7}$.
Donc $\sqrt{5-7x}$ est bien définie pour $x \in \left]-\infty, \frac{5}{7}\right]$.

(2) On sait que $\ln u$ est bien définie pour $u \in]0, +\infty[$.

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+4)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\ln\left(\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+4)}\right)$ est bien définie pour $x \in]-\infty, -4[\cup]-3, -2[\cup]-1, +\infty[$.

Solution 2.

(1) **Méthode 1 :** $\dfrac{e^x + 3x^2}{xe^x + x} = \dfrac{\frac{1}{x} + 3xe^{-x}}{1 + e^{-x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{0+0}{1+0} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ par croissances comparées.

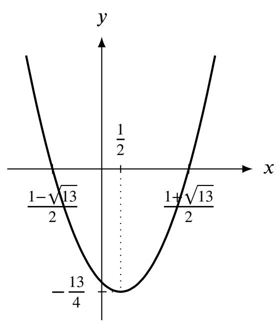
Méthode 2 : $\dfrac{e^x + 3x^2}{xe^x + x} = \dfrac{1 + 3x^2e^{-x}}{x + xe^{-x}}$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ par croissances comparées.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 3x^2e^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + xe^{-x} = +\infty$.
Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 3x^2}{xe^x + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + 3x^2e^{-x}}{x + xe^{-x}} = 0$.

(2) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{(x+2)^2}{(x+2)(x+1)} = \dfrac{x+2}{x+1} \xrightarrow[x \to -2]{} \dfrac{0}{-1} = 0$.

Solution 3.

(1) Posons $x_0 := -1$ et $x_1 := 1$. Alors $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x_1$ et $f(x_0) = f(x_1) = 1$. Donc f n'est pas injective.
Posons $y := -1 \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = x^{14} \geq 0 > -1$ donc $f(x) \neq -1$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -1$.
Donc f n'est pas surjective.
La fonction f n'étant ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.

(2) (a) D'après les propriétés des fonctions quadratiques, puisque le coefficient dominant de $x^2 - x - 3$ est positif, la fonction g admet un minimum en $\frac{1}{2}$, à savoir $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{4}$, et son image est $\mathrm{Im}(g) = \left[-\frac{13}{4}, +\infty\right[$.
Puisque le coefficient dominant est positif, le graphe de g est une parabole convexe.
De plus son discriminant est $\Delta = 13 > 0$, et ainsi $x^2 - x - 3 = 0$ admet deux racines qui sont $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.
Ainsi le graphe de g est :



(b) Le plus grand a tel que h soit injective sur $]-\infty, a]$ est $a = \frac{1}{2}$.

(c) **Méthode 1.** Soit $x \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}|x| > x^2 - x - 3 &\Leftrightarrow x > x^2 - x - 3 \text{ ou } x < -x^2 + x + 3\\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \text{ ou } x^2 - 3 < 0\\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0 \text{ ou } \left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) < 0\\ &\Leftrightarrow x \in]-1, 3[\text{ ou } x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[\\ &\Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{3}, 3\right[\end{aligned}$$

Méthode 2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Premier cas : $x \geq 0$.
Alors $|x| > x^2 - x - 3 \Leftrightarrow x > x^2 - x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x \in [0, 3[$.
Deuxième cas : $x < 0$.
Alors $|x| > x^2 - x - 3 \Leftrightarrow -x > x^2 - x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{3}, 0\right[$.
Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > x^2 - x - 3 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{3}, 3\right[$.

Solution 4.

(1) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, en posant $u = e^{-x}$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} \sin\left(e^{-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{-x}} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$.

(2) *Il y avait plusieurs méthodes, par exemple :*
Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $|3\sin(x^2) - 7\cos(x^3)| \leq 3|\sin(x^2)| + 7|\cos(x^3)| \leq 3 + 7 = 10$. Donc le numérateur est borné.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{7x} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\sin(x^2) - 7\cos(x^3)}{7x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sin(x^2) - 7\cos(x^3)\right)\dfrac{1}{7x} = 0$.

(3) Soit $x > 0$ alors

$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{2}{1+1} = 1.$$

Solution 5.

(1) On dit que $f : A \to B$ est décroissante si

$$\forall x, y \in A,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

(2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$.
Puisque f est décroissante, on a $f(y) \leq f(x)$.
Puisque g est décroissante, on a $g(f(x)) \leq g(f(y))$.
On a bien montré que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \implies g\circ f(x) \leq g\circ f(y)$, i.e. que $g\circ f$ est croissante.

Solution 6.

(1) On a $|\sin(2x)| \leq 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^4} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(2x)}{1+x^4} = 0$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(2x)}{1+x^4} + \sqrt{x} = +\infty$.
Donc f n'est pas majorée.

(2) Soit $x \geq 0$. Alors $\sin(2x) \geq -1$ et donc $\frac{\sin(2x)}{1+x^4} \geq \frac{-1}{1+x^4}$ car $1 + x^4 > 0$.
Puis $1 + x^4 \geq 1$ d'où $\frac{1}{1+x^4} \leq 1$ et $\frac{-1}{1+x^4} \geq -1$.
Donc $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1+x^4} + \sqrt{x} \geq -1 + 0 = -1$.
Ainsi f est minorée par -1.