Université d'Angers – 2022/2023

Analyse élémentaire

Feuille de révision

Exercice 1.
Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, les expressions suivantes sont-elles bien définies ?

1. $\sqrt{\dfrac{x(x-\pi)}{(x+e)(x^2-2)}}$ 2. $\ln\left(x^2+1\right)$ 3. $\ln\left(x^2+3x-10\right)$

Exercice 2.

1. Résoudre $|x^2-1| < x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre $|x^2-4x+3| = 2x+3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre $|2x| \geq x^2-1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(2x)$. Déterminer $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$.

Exercice 4.
Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

Exercice 5.
Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\frac{|\sin(x)|+1}{x^2+1}\right) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(2x^3-3x\right) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)+\cos(x) \end{array}$$

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x - 1$.

1. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
2. Dresser le tableau de signe de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer l'image de f.
5. Est-ce que f est minorée ? majorée ?
6. Esquisser la courbe représentative de f.
7. On note φ (*le nombre d'or*) l'unique solution positive de $f(x) = 0$.
   (a) Montrer que si $a, b > 0$ vérifient $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ alors $\frac{a}{b} = \varphi$.
   (b) Exprimer la solution négative de $f(x) = 0$ en termes de φ de deux façons différentes.
   (c) Montrer que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $\varphi^n = a_n + \varphi b_n$.
   (e) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(b_n)_{n\geq 0}$.
   Avec-vous déjà rencontré cette suite ?

Exercice 7.
Montrer que la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$ est bijective.

Exercice 8.
La fonction $f : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x+2}{e^{-x}}$ est-elle bijective ?

Exercice 9.
Soit $f : E \to F$ une fonction.

1. Montrer que $\forall A \subset E,\ A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que $\forall B \subset F,\ f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. A-t-on égalité en général ?

Exercice 10.
Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

Exercice 11.
Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée.

Exercice 12.
Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x+7}{x^2+4}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi-\cos\left(\ln x+e^x-42+\sqrt{x}\right)}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)x^2$