

Université d'Angers – 2022/2023
Analyse Approfondie
Contrôle Continu du 06/12/2022.

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone,...) n'est autorisé.

Exercice 1.

On considère l'implication

$$|x + 1| \leq 2 \implies |x - 2| \leq 5.$$

1. Quelle est sa réciproque ?
2. Quelle est sa contraposée ?
3. Quelle est sa négation ?
4. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |x + 1| \leq 2 \implies |x - 2| \leq 5$.
(b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.

Que signifie que $\mathbb{R}$ est archimédien ? Écrire cette propriété sous forme d'un énoncé avec des quantificateurs.

Exercice 3.

Les nombres suivants sont-ils rationnels ? Justifier les réponses.

1. $\sqrt{5}$
2. $\sqrt{9}$

Exercice 4.

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice 5.

On considère une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}$.

1. (a) Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$. Écrire sous forme d'un énoncé avec quantificateurs que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
(b) Sous quelle(s) condition(s) cette limite est-elle bien définie ?
2. (a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Écrire sous forme d'un énoncé avec quantificateurs que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.
(b) Sous quelle(s) condition(s) cette limite est-elle bien définie ?

Exercice 6.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ seulement à l'aide de la définition.

Exercice 7.

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 42$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$ seulement à partir des définitions.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si f n'est pas majorée alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante admettant une limite finie en $+\infty$? Justifier.

Exercice 9.

Étudier les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right) \ln(1+x)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x^2 + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 42} - \sqrt{x^2 + 17} \right)$

Exercice 10.

Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule : 1. Ξ 2. ζ 3. ν 4. Λ