

Université d'Angers – 2022/2023
Analyse Approfondie
Contrôle Continu du 19/10/2022.

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone,...) n'est autorisé.

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire la négation de l'énoncé suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq N \implies |f(x)| \leq \varepsilon$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Écrire la contraposée de l'implication suivante :

$$a + b \notin \mathbb{Q} \implies (a \notin \mathbb{Q} \text{ ou } b \notin \mathbb{Q})$$

3. Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. Écrire formellement avec des quantificateurs que " f est surjective".

Exercice 2.

Soit E un ensemble. Montrer que $\forall A, B \subset E, A \cup B = A \cap B \implies A = B$.

Exercice 3.

1. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.

(a) Déterminer $f(\{-\pi, -2, 0, 2\})$.

(b) Déterminer $f^{-1}\left(\left\{-e, -\pi, 0, \sqrt{2}, 42\right\}\right)$.

2. On considère une fonction $g : A \rightarrow B$.

(a) Montrer que si g est surjective alors $\forall F \subset B, g(g^{-1}(F)) = F$.

(b) La conclusion reste-t-elle vraie si g n'est pas surjective? Justifier votre réponse.

Exercice 4.

On considère la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

La fonction f est-elle injective? surjective? bijective? Justifier vos réponses.

Exercice 5.

1. Démontrer que $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$.

2. Démontrer que $\sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Vous pouvez utiliser toutes les propriétés de la partie entière vues en cours et en TD.

Exercice 7.

Soient A et B deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est non-vide et majorée.

2. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice 8. Bonus!

Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule : 1. Γ 2. φ 3. H 4. ξ

Solution de l'exercice 1.

- /2 1. $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq N \text{ et } |f(x)| > \varepsilon$
 /2 2. $(a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q}) \implies a + b \in \mathbb{Q}$
 /1 3. $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$

Solution de l'exercice 2.

- /3 Soient $A, B \subset E$ tels que $A \cup B = A \cap B$.
 Alors $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$ et $B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$.
 Donc $A = B$ par double inclusion.

Solution de l'exercice 3.

- /1 1. (a) $f(\{-\pi, -2, 0, 2\}) = \{0, 2, \pi\}$
 /2 (b) $f^{-1}\left(\left\{-e, -\pi, 0, \sqrt{2}, 42\right\}\right) = \left\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -42, 42\right\}$
 /4 2. (a) Soient $g : A \rightarrow B$ une fonction surjective et $F \subset B$.
 - Soit $y \in g(g^{-1}(F))$ alors il existe $x \in g^{-1}(F)$ tel que $y = g(x)$.
 Puisque $x \in g^{-1}(F)$, on a $g(x) \in F$. Ainsi $y = g(x) \in F$.
 On a montré que $g(g^{-1}(F)) \subset F$. (N.B. cette inclusion n'utilise pas la surjectivité de g)
 - Soit $y \in F$. Puisque g est surjective, il existe $x \in A$ tel que $y = g(x)$.
 Puisque $g(x) = y \in F$, on a que $x \in g^{-1}(F)$. Ainsi $y = g(x) \in g(g^{-1}(F))$.
 On a montré que $F \subset g(g^{-1}(F))$.
 Donc $g(g^{-1}(F)) = F$ par double inclusion.
 /3 (b) L'égalité n'est pas forcément vraie si g n'est pas surjective.
 En effet, définissons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$ et posons $F := \{-1\}$.
 Alors $g(g^{-1}(F)) = g(\emptyset) = \emptyset \neq F$.

Solution de l'exercice 4.

- /1 • Remarquons que $1, 3 \in \mathbb{N}, 1 \neq 3$ et $f(1) = f(3) = 0$. Donc f n'est pas injective.
 /2 • Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors $n := 2m \in \mathbb{N}$ est pair et ainsi $f(n) = f(2m) = \frac{2m}{2} = m$.
 On a montré que $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m = f(n)$, i.e. que f est surjective.
 /1 • La fonction f n'est pas bijective puisqu'elle n'est pas injective.

Solution de l'exercice 5.

- /3 1. **Méthode 1.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{15} \in \mathbb{Q}$.
 Alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $b \neq 0$ et $\sqrt{15} = \frac{a}{b}$. Ainsi $a^2 = 15b^2 = 3 \cdot 5 \cdot b^2$.
 Ainsi 3 apparaît un nombre pair de fois dans la décomposition primaire du terme de gauche (a^2) et
 un nombre impair de fois dans la décomposition primaire du terme de droite ($3 \cdot 5 \cdot b^2$).
 D'où une contradiction avec l'unicité de la décomposition primaire.

Méthode 2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{15} \in \mathbb{Q}$.

Alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $b \neq 0$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $\sqrt{15} = \frac{a}{b}$.

D'où $a^2 = 15b^2 = 3 \cdot 5 \cdot b^2$. Donc $3|a^2$ et, d'après le lemme d'Euclide, $3|a$ puisque 3 est premier.

Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 3k$. Donc $15b^2 = a^2 = 3^2 k^2$, d'où $3k^2 = 5b^2$.

D'après le lemme de Gauss, comme $3|5b^2$ et $\text{pgcd}(3, 5) = 1$, on a $3|b^2$.

Enfin, on déduit du lemme d'Euclide que $3|b$.

Ainsi $3|\text{pgcd}(a, b) = 1$, d'où une contradiction.

- /3 2. Supposons par l'absurde que $r := \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.
 On remarque que $r^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 8 + 2\sqrt{15}$.
 Ainsi $\sqrt{15} = \frac{r^2 - 8}{2} \in \mathbb{Q}$, d'où une contradiction avec la question précédente.

Solution de l'exercice 6.

/5 **Méthode 1.** Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$.

On sait que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où $n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n$ car $n > 0$.

Puis $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n$ car $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor nx \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à nx .

Ainsi $\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$.

Donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Méthode 2. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- On sait que $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ donc $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$.

Ainsi $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor$ puisque la fonction partie entière est croissante.

- On sait que $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$ et puis $\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$ par croissance de la partie entière.

Ainsi $n\lfloor x \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$ puisque $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Donc $\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

D'où $\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$, par croissance de la fonction partie entière et car $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

Donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Méthode 3. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$.

On sait que $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ et $x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

On sait que $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$.

Ainsi $n\lfloor x \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$ par croissance de la partie entière et car $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

D'où $\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$ avec $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Solution de l'exercice 7.

- /2 1. • Puisque $A \neq \emptyset$, il existe $x \in A \subset A \cup B$. Donc $A \cup B \neq \emptyset$.
 • On sait que A est majorée, donc il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, x \leq M_1$.
 On sait que B est majorée, donc il existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in B, x \leq M_2$.
 Posons $N := \max(M_1, M_2)$. Soit $x \in A \cup B$.
 Premier cas : si $x \in A$ alors $x \leq M_1 \leq N$.
 Deuxième cas : si $x \in B$ alors $x \leq M_2 \leq N$.
 On a bien montré que $\exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in A \cup B, x \leq N$, i.e. que $A \cup B$ est majoré.

- /3 2. • Soit $x \in A \cup B$.
 Premier cas : si $x \in A$ alors $x \leq \sup(A) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$.
 Deuxième cas : si $x \in B$ alors $x \leq \sup(B) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$.
 Donc $\max(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant de $A \cup B$.
 • Soit $\varepsilon > 0$.
 Premier cas : $\sup(A) \leq \sup(B)$.
 Alors il existe $x \in B$ tel que $\sup(B) - \varepsilon < x$ puisque $\sup(B)$ est le plus petit des majorants de B .
 Deuxième cas : $\sup(B) \leq \sup(A)$.
 Alors il existe $x \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < x$ puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A .
 Dans tous les cas, on a montré qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que $\max(\sup(A), \sup(B)) - \varepsilon < x$.
 Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \cup B, \max(\sup(A), \sup(B)) - \varepsilon < x$, i.e. $\max(\sup(A), \sup(B))$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$.

Solution de l'exercice 8.

- /0.5 1. Γ est un gamma majuscule.
 /0.5 2. φ est un phi minuscule.
 /0.5 3. H est un éta majuscule.
 /0.5 4. ξ est un xi minuscule.