

Feuille d'exercices n°5

Exercice 1.

Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes et préciser si elles sont définies :

1. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$
2. $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt + yt$

Exercice 2.

Soit $q : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $q(P) = P'(1)^2 - P'(0)^2$.

1. Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire φ .
2. Quelle est la matrice de φ dans la base $B = (1, X, X^2)$?
3. Déterminer le noyau et le cône isotrope de q .
4. Est-ce que φ est non-dégénérée? définie? positive? négative?
5. Déterminer $\{X^2\}^\perp$ et $\{1\}^\perp$.

Exercice 3.

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On pose $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (-1, -1, 0)$.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille (v_1, v_2, v_3) de sorte à obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

On définit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormale de $(\mathbb{R}_2[X], \varphi)$.

Exercice 5. *Le théorème de Pythagore*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Montrer que

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Exercice 6.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Montrer que :

1. Pour tout $A \subset E$, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. $\forall A, B \subset E, A \subset B \implies A^\perp \supset B^\perp$.
3. $\forall A \subset E, (\text{Vect}(A))^\perp = A^\perp$.
4. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $E = F \oplus F^\perp$.
En particulier, $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.
5. $\forall A \subset E, (A^\perp)^\perp = \text{Vect}(A)$.
6. $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.
7. $\forall A \subset E, A \cap A^\perp \subset \{0\}$.
8. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 7.

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\text{Ker}(f^*) = (\text{Im}(f))^\perp$ et $\text{Im}(f^*) = (\text{Ker}(f))^\perp$.

Exercice 8. *Un lemme de la démonstration du théorème spectral*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme symétrique de E .

Montrer que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f alors $\text{SEP}(f, \lambda)$ et $\text{SEP}(f, \mu)$ sont orthogonaux.

Exercice 9. *Un autre lemme de la démonstration du théorème spectral*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme symétrique de E .

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^* .

Exercice 10. *Un dernier lemme de la démonstration du théorème spectral*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme symétrique de E .

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \chi_f(z) = 0 \implies z \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. *Projecteurs orthogonaux*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien.

1. On dit que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal si p est un projecteur tel que $\text{Ker}(p) = \text{Im}(p)^\perp$.
 - (a) Montrer qu'un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique.
 - (b) Montrer qu'un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
Indice : étudier $f(t) = \|x + ty\|^2$ pour $x \in \text{Im}(p)$ et $y \in \text{Ker}(p)$ fixés.
2. Étant donné F un sous-espace vectoriel de E , on dénote par p_F le projecteur orthogonal sur F , c'est-à-dire le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
 - (a) Montrer que $\forall x \in E, \forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$.
 - (b) Montrer que $\forall x \in E, \forall y \in F, \|x - y\| = \|x - p_F(x)\| \Leftrightarrow y = p_F(x)$.