

Feuille d'exercices n°2

Exercice 0. À la maison, très important !

Réviser les propriétés du déterminant d'une matrice carrée.

Exercice 1.

1. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices telles qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vérifiant $AB + \alpha A + \beta B = 0$.
Montrer que $AB = BA$.
2. A-t-on généralement $AB = BA$?

Exercice 2.

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices.

A-t-on nécessairement $(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$?

Si non, donner une condition sur A et B pour que cette identité soit vraie.

Exercice 3.

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On dénote par $C_1, \dots, C_p \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de A .

1. Montrer que $\text{rg}(A) = n$ si et seulement si $(C_1, \dots, C_p)$ engendre $M_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\text{rg}(A) = p$ si et seulement si $(C_1, \dots, C_p)$ est libre.

Exercice 4.

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ est inversible et calculer son inverse A^{-1} .

Exercice 5.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

Montrer que $A^2 + I_n$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 6.

Étant donnée $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit la *transposée* de A par ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t(\alpha A + B) = \alpha {}^tA + {}^tB$.
2. Montrer que $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.
3. Montrer que $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.
4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :
(a) ${}^tAA = I_n$ (b) $A^2 = -I_n$ (c) ${}^tA = -A$

Exercice 7.

On définit $\text{tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ par $\text{tr}((a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$. On dit que $\text{tr}(A)$ est la *trace* de A .

1. Montrer que tr est une forme linéaire.
2. Montrer que $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{p,n}, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. Est-ce qu'il existe $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AC + DB = I_n$ et $CA + BD = 0$?
4. Résoudre l'équation $3X + 2{}^tX = \text{tr}(X)I_5$ d'inconnue $X \in M_5(\mathbb{R})$.

Exercice 8.

On définit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est bien définie et linéaire.
2. On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
4. Soit $Q \in \text{Im}(f)$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.