Université d'Angers – 2021/2022

Algèbre linéaire et bilinéaire

Feuille d'exercices n°1

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.
Lorsque les lois d'un espace vectoriel ne sont pas précisées, il s'agit des lois usuelles.

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que si $E = F \cup G$ alors $F = E$ ou $G = E$.
Un sous-espace vectoriel ne peut pas s'écrire comme union de deux sous-espaces propres.

Exercice 2.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $\mathrm{Vect}(F_1 \cup \cdots \cup F_r) = \left\{x_1 + \cdots + x_r \ : \ x_i \in F_i\right\}$.
Ce sous-espace vectoriel est donc généralement dénoté par $F_1 + \cdots + F_r$.

Exercice 3.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F_1 + \cdots + F_r = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ si et seulement si $\forall k = 1, \dots, r-1, \left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1} = \{0\}$.

Exercice 4.
On considère les sous-espaces vectoriels suivants de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$:

$$F_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0\right\}, \quad F_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\right\} \quad \text{et} \quad F_3 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y\right\}.$$

1. Montrer que les F_i sont deux à deux en somme directe.
2. Est-ce que F_1, F_2 et F_3 sont en somme directe ?

Exercice 5.
On considère $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{P} := \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\right\}$ des fonctions continues et paires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{I} := \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\right\}$ des fonctions continues et impaires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 6.
On considère l'espace vectoriel réel formé des suites convergentes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que le sous-espace vectoriel des suites constantes et le sous-espace des suites convergentes vers 0 sont supplémentaires.

Exercice 7.
On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Montrer que la famille $(f_a \ : \ x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 8.

1. Montrer que $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.
2. Est-ce une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[\![X]\!]$ des séries formelles à coefficients réels ?

Exercice 9.
On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2.

1. Montrer que $(1, 1 + X, 1 + X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire $P(X) = a + bX + cX^2$ dans cette base.

Exercice 10.
Montrer que tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire. Est-il unique ?

Exercice 11.
Est-ce que les espaces vectoriels réels suivants sont de dimension finie ?
1. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, 2. $\mathbb{R}^3$, 3. $\mathbb{C}$, 4. $\mathbb{R}[X]$, 5. L'espace vectoriel des fonctions dérivables vérifiant $f' = f$.

Exercice 12.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
1. Montrer que F est de dimension finie et que $\dim F \leq \dim E$.
2. Montrer que si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Exercice 13.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
1. Montrer que $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.
2. Montrer que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ (*formule de Grassmann*).

Exercice 14.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :
(i) $E = F + G$, (ii) $F \cap G = \{0\}$, (iii) $\dim E = \dim F + \dim G$.

Exercice 15.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F_1 + \cdots + F_r = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ si et seulement si $\dim(F_1 + \cdots + F_r) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_r)$.

Exercice 16.
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$.
1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Est-ce que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$?

Exercice 17.
On appelle *projecteur* ou *projection vectorielle* tout endomorphisme vérifiant $p \circ p = p$.
1. (a) Montrer que si $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection vectorielle alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.
   (b) Ainsi tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = u + v$ où $u \in \operatorname{Im} p$ et $v \in \operatorname{Ker} p$.
   Vérifier que $p(x) = u$.
2. On suppose que $E = F \oplus G$ et on définit $p \in \mathcal{L}(E)$ par $p(x) = u$ où $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.
   Vérifier que p est un projecteur.
   On dit que p est la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G.
3. Montrer que p est la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G si et seulement si $\mathrm{id} - p$ est la projection vectorielle de E sur G parallèlement à F.

Exercice 18.
1. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X) - XP'(X) \end{array}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 19.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$,
(ii) $f \circ f = 0$ et $\dim E = 2 \operatorname{rg} f$.