Examen

du 15 décembre 2021.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours et des TDs. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

1. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux en justifiant :
   (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est diagonalisable alors A^2 est diagonalisable.
   (b) Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$. Si B^2 est diagonalisable alors B est diagonalisable.
   (c) Il existe une matrice $C \in M_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $\pi_C(X) = X^2 + 1$.
   (d) Il existe une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $\pi_D(X) = X^2 + 1$.

2. Donner l'énoncé de l'inégalité de Minkowski.
   On ne demande pas d'expliquer le cas d'égalité.

3. Donner la définition d'un produit scalaire.

Exercice 2.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent, i.e. $u \circ v = v \circ u$.
1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par v.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.
3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$. Montrer que le sous-espace propre $\mathrm{SEP}(u, \lambda)$ est stable par v.

Exercice 3.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ où $m \in \mathbb{R}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de m, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4.
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
1. Déterminer le polynôme minimal de A.
2. Est-ce que A est diagonalisable ? trigonalisable ?
3. Déduire de la question 1 que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3.

Exercice 5.
Pour chacune des formes quadratiques suivantes, déterminer sa signature et son rang puis dire si elle est non-dégénérée, définie, positive, negative :
1. $q(x, y, z) = 2x^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$
2. $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$

Tournez la page !

Exercice 6.

Pour $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^t AB)$.

1. Montrer que $(M_{n,p}(\mathbb{R}), < \cdot, \cdot >)$ est un espace euclidien.
2. Montrer que si $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}(AB)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\,\mathrm{tr}(B^2)$.
   On rappelle que $S_n(\mathbb{R})$ dénote l'espace des matrices symétriques réelles carrées de taille $n \times n$.
3. On suppose désormais que $n = p = 2$ et on considère

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que (A_1, A_2, A_3) est une famille libre de $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) En appliquant l'algorithme de Gram–Schmidt, trouver une famille (B_1, B_2, B_3) orthogonale pour $< \cdot, \cdot >$ telle que $\mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3) = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.

Solution de l'exercice 1.

1. (a) Vrai.
   Supposons que A soit diagonalisable alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Puis $A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1}$ où D^2 est diagonale. Donc A^2 est diagonalisable.

   (b) Faux.
   Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable mais B n'est pas diagonalisable puisque $\pi_B(x) = X^2$ n'est pas à racines simples.

   (c) Vrai.
   Si on pose $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\pi_C(X) = X^2 + 1$.

   (d) Faux.
   Soit $D \in M_3(\mathbb{R})$ alors son polynôme caractéristique $\chi_D(X)$ est de degré 3 et admet donc une racine. Puisque $\chi_D^{-1}(0) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(D) = \pi_D^{-1}(0)$, on sait que π_D admet au moins une racine réelle, ce qui n'est pas le cas de $X^2 + 1$.

2. Si $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique positive sur un espace vectoriel réel E alors

$$\forall x, y \in E,\ \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

3. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Solution de l'exercice 2.

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
   Alors $u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$.
   Donc $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.

2. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$.
   Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
   Ainsi $v(y) = v(u(x)) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x))$, donc $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$.

3. Soit $x \in \mathrm{SEP}(u, \lambda)$.
   Alors $u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$.
   Donc $v(x) \in \mathrm{SEP}(u, \lambda)$.

Solution de l'exercice 3.
Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & m+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & m-X \end{vmatrix} \\
&= -(1+X)\begin{vmatrix} -2-X & 0 \\ 1 & m-X \end{vmatrix} + (m+1)\begin{vmatrix} 1 & -2-X \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1+X)(2+X)(m-X) - (m+1)(1+X) \\
&= -(1+X)(X^2 + (2-m)X - m + 1) \\
&= -(1+X)^2(X - m + 1)
\end{aligned}$$

On remarque que χ_A est scindé.
Puis l'ensemble des valeurs propres de A est $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \chi_A^{-1}(0) = \{-1, m-1\}$.
Si $m = 0$ alors -1 est une valeur propre de multiplicité (algébrique) 3.

Sinon, -1 est une valeur propre de multiplicité (algébrique) 2 et l'autre valeur propre est $m-1$ qui vérifie $\dim \mathrm{SEP}(A, m-1) = \mathrm{mult}_{m-1}(\chi_A) = 1$.

Calculons $\mathrm{SEP}(A,-1)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,-1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (m+1)z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \\ -x+y+(m+1)z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ (m+1)z & = & 0 \end{array} \right.$$

- Premier cas : si $m=-1$ alors $\mathrm{SEP}(A,-1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  Donc $\dim \mathrm{SEP}(A,-1) = \mathrm{mult}_{-1}(\chi_A) = 2$ et A est diagonalisable.

- Deuxième cas : si $m \neq -1$ alors $\mathrm{SEP}(A,-1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

  Donc $\dim \mathrm{SEP}(A,-1) = 1 < 2 \leq \mathrm{mult}_{-1}(\chi_A)$ et A n'est pas diagonalisable.

Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $m=-1$.

Solution de l'exercice 4.

1. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-4X+4) = -(X-2)^3$$

   On sait que le polynôme minimal π_A de A est un polynôme unitaire qui divise χ_A et qui a les mêmes diviseurs irreductibles. Donc $\pi_A(X) = (X-2)$ ou $\pi_A(X) = (X-2)^2$ ou $\pi_A(X) = (X-2)^3$.
   Puisque $A - 2I_3 \neq 0$ et que $(A-2I_3)^2 = 0$, on obtient que $\pi_A(X) = (X-2)^2$.

2. A n'est pas diagonalisable puisque son polynôme minimal admet 2 comme racine double.
   A est trigonalisable puisque son polynôme minimal est scindé.

3. On sait que $0 = (A-2I_3)^2 = A^2 - 4A + 4I_3$. Donc $\frac{1}{4}(4I_3 - A)A = I_3$.
   Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(4I_3 - A)$.

Solution de l'exercice 5.

1. Méthode 1 : $q(x,y,z) = 2x^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz = (x-y-z)^2 + x^2 - y^2$.
   Méthode 2 (décomposition de Gauss) :

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= 2x^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \\ &= 2x^2 - 2x(y+z) + z^2 + 2yz \\ &= 2\left(x - \frac{y+z}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(y+z)^2 + z^2 + 2yz \\ &= 2\left(x - \frac{y+z}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}y^2 + yz + \frac{1}{2}z^2 \\ &= 2\left(x - \frac{y+z}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(y-z)^2 + z^2 \end{aligned}$$

   Donc la signature est $(2,1)$, le rang est 3, la forme est non-dégénérée, elle n'est pas définie, pas négative, pas positive.

2.
$$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= xy + yz + zt + tx \\ &= (x+z)(y+t) \\ &= \frac{1}{4}\left((x+z+y+t)^2 - (x+z-y-t)^2\right) \end{aligned}$$

Donc la signature est $(1,1)$, le rang est 2, la forme est dégénérée, elle n'est pas définie, pas négative, pas positive.

Solution de l'exercice 6.

1. Puisque $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension finie, il suffit de vérifier que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire.
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.
Si on pose ${}^tAB = (c_{ij})$ alors $c_{ii} = \sum_{j=1}^p a_{ij}b_{ij}$. Donc $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}b_{ij}$.
(on remarque qu'il s'agit du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{np}$*)*
   (i) $< \cdot, \cdot >$ est symétrique : Ssoient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, alors
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \langle B, A\rangle\,.$$
   (ii) $< \cdot, \cdot >$ est linéaire par rapport à la deuxième variable : Soient $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors
$$\langle A, \lambda B + C\rangle = \mathrm{tr}({}^tA(\lambda B + C)) = \mathrm{tr}(\lambda {}^tAB + {}^t AC) = \lambda\,\mathrm{tr}({}^tAB) + \mathrm{tr}({}^tAC) = \lambda\,\langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle\,.$$
   (iii) $< \cdot, \cdot >$ est positive : soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ alors $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \geq 0$.
   (iv) $< \cdot, \cdot >$ est définie : soit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ alors
$$\langle A, B\rangle = 0 \implies \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}^2 = 0 \implies \forall i, j,\ a_{ij} = 0 \implies A = 0.$$

2. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$.
Alors l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne $\langle A, B\rangle^2 \leq \langle A, A\rangle \langle B, B\rangle$, i.e. $\mathrm{tr}({}^tAB)^2 \leq \mathrm{tr}({}^tAA)\,\mathrm{tr}({}^tBB)$.
On termine en utilisant que ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$: $\mathrm{tr}(AB)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\,\mathrm{tr}(B^2)$.

3. (a) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$ alors
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$
   donc (A_1, A_2, A_3) est une famille libre.
   (b) On applique l'algorithme de Gram–Schmidt :
   - On prend $B_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   - $A_2 - \frac{\langle A_2, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle} B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
     On peut donc prendre $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - $B_3 = A_3 - \frac{\langle A_3, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle} B_1 - \frac{\langle A_3, B_2\rangle}{\langle B_2, B_2\rangle} B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
     On peut donc prendre $B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   La famille (B_1, B_2, B_3) obtenue est orthogonale et vérifie $\mathrm{Vect}(B_1, B_2, B_3) = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.