Université d'Angers – 2021/2022

Algèbre linéaire et bilinéaire

Devoir maison n°1

À rendre le 6 octobre 2021.

Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
À moins que l'énoncé d'une question ne précise le contraire, vous pouvez utiliser tous les résultats du cours et de la première feuille de TD. Ces résultats doivent être cités correctement (quelles sont les hypothèses ? la conclusion ?).

Exercice 1.
Les familles suivantes sont-elles libres ou liées dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
1. $(\sin x, \cos x)$
2. $(\sin(2x), \sin x, \cos x)$
3. $(\cos(2x), \sin^2 x, \cos^2 x)$

Exercice 2.
Existe-t-il une application $\mathbb{R}$-linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = y = z = t\right\}$?

Exercice 3.
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$,
(ii) $f \circ f = f$, $g \circ g = g$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 4.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
1. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}.$$
2. On suppose de plus que E est de dimension finie. Montrer alors que
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$
3. Toujours dans le cas où E est de dimension finie, montrer que
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

On rappelle que $f^2 = f \circ f$.

Exercice 5.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ sont en somme directe.

Commentaires :

- Il n'est pas nécessaire de réécrire/paraphraser les questions (je les connais).
- Il n'est pas nécessaire de rappeler les définitions du cours (je les connais aussi). De plus, vous risquez de perdre des points si vous faites une erreur en écrivant une définition...
- Lorsque vous utilisez un résultat du cours ou du TD, il faut bien le citer : quelles sont les hypothèses ? pourquoi sont-elles vérifiées ? quelle est la conclusion ? Par ailleurs, mieux vaut ne rien écrire que simplement "d'après le cours" (ou quelque chose d'aussi vague).
- En revanche, il faut énoncer clairement ce que vous supposez. Ce n'est pas *évident*, même pour montrer une implication : on a des hypothèses différentes selon qu'on la démontre directement, par contraposée ou par l'absurde.
- Il faut aussi définir clairement les objets que vous utilisez, c'est très important : ce n'est pas au lecteur de deviner si x est un nombre réel, un nombre complexe, un vecteur...Ainsi que les hypothèses que vous faites sur ces objets. L'exactitude de votre réponse peut aussi varier selon les dépendances entre les variables que vous utilisez.
- Un quantificateur ($\forall$, $\exists$) lie la variable qu'il capture. Donc il n'est généralement pas correct de rédiger un raisonnement sur une variable introduite par un quantificateur.

  Incorrect :
  On veut montrer que $(\sin, \cos)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire
  $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \sin + \beta \cos = 0 \implies \alpha = \beta = 0$$
  On évalue en 0, ce qui donne $\alpha \sin 0 + \beta \cos 0 = 0$, i.e. $\beta = 0$.
  Ici les variables α et β ne sont pas correctement définies au début du raisonnement. Où vivent-elles ? Que vérifient-elles ?

  Correct :
  Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \sin + \beta \cos = 0$.
  En évaluant en 0, on obtient $\alpha \sin 0 + \beta \cos 0 = 0$, i.e. $\beta = 0$.
- La structure logique de vos réponses est très importante. Vous pouvez utiliser du français ou des symboles, ça importe peu, mais votre raisonnement doit être clair et sans ambigüité : comment passe-t-on d'une étape à une autre ? Pourquoi est-ce que ce raisonnement répond à la question ? En particulier, vous ne devez pas écrire une suite d'équations les unes sous les autres sans connecteurs logiques.
- Les symboles et les mots ont un sens : par exemple $\implies$ et $\Leftrightarrow$ ne signifient pas la même chose.
  - Si vous utilisez des équivalences fausses alors que les implications sont vraies et auraient suffi, vous n'aurez pas tous les points.
  - Si vous raisonnez par implications pour démontrer une équivalence, il faut vérifier la réciproque (faites particulièrement attention lors de la résolution d'une équation : si vous démontrez que "*si x est solution alors* $x = 3$", vous devez aussi vérifier que 3 est bien solution).

  De même, les autres symboles, comme $\in$, $\subset$ ou $=$, ont un sens bien précis.
- Une bonne rédaction doit être complète (tout doit être clairement justifié et sans ambigüité) mais aussi concise (en particulier, si vous donnez des hypothèses supplémentaires inutiles ou réalisez des calculs inutiles, cela montre que vous ne comprenez pas les résultats que vous utilisez).

Solution de l'exercice 1.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin x + \beta \cos x = 0$.
   En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\alpha = 0$. En évaluant en $x = 0$, on obtient $\beta = 0$.
   Donc la famille $(\sin x, \cos x)$ est libre.

2. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(2x) + \beta \sin x + \gamma \cos x = 0$.
   En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\beta = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(2x) + \gamma \cos x = 0$.
   Puis, en évaluant en $x = 0$, on obtient $\gamma = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(2x) = 0$.
   Et enfin, en évaluant en $x = \frac{\pi}{4}$, on obtient $\alpha = 0$.
   Donc la famille $(\sin(2x), \sin x, \cos x)$ est libre.

3. La famille $(\cos(2x), \sin^2 x, \cos^2 x)$ est liée puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$.

Solution de l'exercice 2.
Supposons par l'absurde qu'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = y = z = t\right\}.$$

Notons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1, 1))$ et donc que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$.
Alors, d'après le théorème du rang, puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie, on obtient que

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}(f) = 4 - 1 = 3.$$

Mais $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, donc $3 = \dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$. D'où une contradiction.

Solution de l'exercice 3.

- Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (ii).
  On suppose que $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
  On a alors $f \circ f = f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f = g \circ f = f$.
  Et de même $g \circ g = g \circ (f \circ g) = (g \circ f) \circ g = f \circ g = g$.

  Il reste à montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puis $y = f(x) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$.
  Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Puis $y = g(x) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f)$.
  Donc $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

- Montrons que (ii) $\Longrightarrow$ (i).
  On suppose que $f \circ f = f$, $g \circ g = g$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.
  Soit $x \in E$, alors $g(x) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Donc il existe $x' \in E$ tel que $g(x) = f(x')$.
  Donc $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(f(x')) = f \circ f(x') = f(x') = g(x)$.
  On a donc bien montré que $\forall x \in E,\ f \circ g(x) = g(x)$, i.e. que $f \circ g = g$.

  Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$. Donc il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = g(x')$.
  Donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(g(x')) = g \circ g(x') = g(x') = f(x)$.
  On a donc bien montré que $\forall x \in E,\ g \circ f(x) = f(x)$, i.e. que $g \circ f = f$.

Solution de l'exercice 4.

1. Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
   On suppose que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $v \in E$ tel que $x = f(v)$ puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$.
   Puisque $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $0 = f(x) = f(f(v))$. Donc $v \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $x = f(v) = 0$.
   On a montré que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$. L'autre inclusion est évidente puisque $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel (comme intersection de deux sous-espaces vectoriels).

   Montrons maintenant que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
   On suppose que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
   Si $x \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(f(x)) = f(0) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. On a montré que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ alors $f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Ainsi $f(x) = 0$, i.e. $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
   On a montré que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$, d'où $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

2. Si $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ alors $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ d'après la question 1.
   Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
   Alors $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ d'après la question 1 et $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ d'après le théorème du rang, puisque E est de dimension finie. Donc $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ et $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f^2) + \dim \mathrm{Im}(f^2)$ puisque f et f^2 sont deux endomorphismes de E de dimension finie.

   Si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ alors $\dim \mathrm{Im}(f^2) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f^2) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$.
   De plus $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

   Réciproquement, si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ alors
   $\dim \mathrm{Ker}(f^2) = \dim E - \dim \mathrm{Im}(f^2) = \dim E - \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f)$. De plus $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
   Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Solution de l'exercice 5.
Soient $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ tels que

$$x + y + z = 0. \tag{1}$$

En appliquant f à (1), il vient

$$y - z = 0. \tag{2}$$

En appliquant f à (2), il vient

$$y + z = 0. \tag{3}$$

Puis $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \implies x = y = z = 0.$
Donc $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ sont en somme directe.