Chapitre 3 - Algèbre bilinéaire

I - Généralités

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une forme bilinéaire de E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que :

1 - φ est linéaire p.r. à la première variable :

$$\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \varphi(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$$

2 - φ est linéaire p.r. à la deuxième variable :

$$\forall x, y_1, y_2 \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \varphi(x, \alpha y_1 + y_2) = \alpha \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$

Exemple : Le produit scalaire
$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$
est une forme bilinéaire.

Prop : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire, $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{K}$, $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q \in E$. Alors :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^q \beta_j y_j\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j)$$

Démo :
$$\varphi\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^q \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi\left(x_i, \sum_{j=1}^q \beta_j y_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j)$$

Remarque : Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est entièrement déterminée par les $\varphi(e_i, e_j)$.

En effet, soit $x, y \in E$, $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tous nuls sauf un nombre fini. $y = \sum_{j \in I} \beta_j e_j$, $\beta_j \in \mathbb{K}$ tous nuls sauf un nombre fini.

Alors, $\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum \alpha_i e_i, \sum \beta_j e_j\right) = \sum_{i,j \in I} \alpha_i \beta_j \varphi(e_i, e_j)$.

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit qu'une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est symétrique (fbs) si $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

Remarque : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.

$$\varphi \text{ fbs} \iff \begin{cases} \varphi \text{ est symétrique} : \forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x) \\ \varphi \text{ est linéaire p.r. à la première variable.} \end{cases}$$

En effet, par symétrie, φ est linéaire p.r. à la deuxième variable.

Exemple : $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$.

Def : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une fbs.

La forme quadratique associée à φ est $q : E \to \mathbb{K}$ définie par $q(x) = \varphi(x, x)$.

Exemple : $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$, alors $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,x) = \varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1 x_2 + x_2 x_1 = 2 x_1 x_2$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. $q(\lambda v) = 2(\lambda x_1)(\lambda x_2) = 2\lambda^2 x_1 x_2$
$= \lambda^2 q(x)$

⚠ q n'est pas linéaire.

Soit φ une fbs sur E un $\mathbb{K}$-ev. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$, alors $q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda \varphi(x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x,x) = \lambda^2 q(x)$.

Prop : Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, $x_1, \cdots, x_p \in E$. Alors :

$$q\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 q(x_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i \alpha_j \varphi(x_i, x_j)$$

Démo : $q\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j\right)$.

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \alpha_j \varphi(x_i, x_j).$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \varphi(x_i, x_i) + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \varphi(x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 q(x_i) + 2 \times \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \varphi(x_i, x_j)$$

Prop : E un $\mathbb{K}$-ev, $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ fbs et $q : E \to \mathbb{K}$ la forme quadratique associée.

1 - $\forall x, y \in E$, $q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$

2 - $\forall x, y \in E$, $2\varphi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$

3 - $\forall x, y \in E$, $2\varphi(x,y) = q(x) + q(y) - q(x-y)$

4 - $\forall x, y \in E$, $4\varphi(x,y) = q(x+y) - q(x-y)$.

5 - $\forall x, y \in E$, $q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y))$.

Remarque : 2, 3 et 4 s'appellent "identités de polarisation".

Remarque : Si $\mathbb{K}$ est un corps caractéristique $\neq 2$ (ie. $2 \neq 0$, ex : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), alors les identités de polarisation permettent d'exprimer φ à partir de q, ie. φ et q déterminent l'un l'autre.

On dit que $q(x) = \varphi(x,x)$ est la forme quadratique associée à φ et que $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x) + q(y) - q(x-y))$ est la forme polaire associée à q.

Prop : Soit E un espace vectoriel défini sur un corps de caractéristique $\neq 2$. Alors, une application $q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique ssi :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
- $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$ est bilinéaire.

Def : Soit $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ une fbs de E un $\mathbb{K}$-ev. Le noyau de φ est :

$$\ker \varphi = \{x\in E,\ \forall y \in E,\ \varphi(x,y)=0\}.$$

Def : Le cône isotrope de φ est $C_\varphi = \{x\in E .\ \varphi(x,x) = 0\}$.

Remarques : 1 - C_φ est un cône : $\lambda\in\mathbb{K}$, $x \in C_\varphi \Rightarrow \lambda x \in C_\varphi$.

En effet, $\varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x,x) = \lambda^2\, 0 = 0$.

2 - $\ker \varphi$ est un sev de E.

3 - En général, C_φ n'est pas un sev. En effet, $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))$

$= x_1y_2 + x_2y_1$, alors $q(x_1,x_2) = 2x_1x_2$.

Donc, $C_\varphi = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} \cup \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$

4 - $0 \in \ker\varphi \subset C_\varphi$. En effet, si $x \in \ker\varphi$, $\varphi(x,x) = 0$

Def : Soit φ une fbs sur E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que φ est non-dégénérée si $\ker\varphi = \{0\}$. On dit que φ est définie si $C_\varphi = \{0\}$.

Prop : φ est définie $\Rightarrow$ φ est non-dégénérée

Démo : $\{0\} \subset \ker\varphi \subset C_\varphi = \{0\}$, donc $\ker\varphi = \{0\}$.

II - Cas de la dimension finie

Def : Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$ une base de E.

et $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire symétrique.

Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i,e_j))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \cdots & \varphi(e_n,e_n)\end{pmatrix}$

Remarque : φ est symétrique donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique.

${}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Proposition : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une fbs, $x, y \in E$. Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

Alors, $\varphi(x,y) = {}^tXAY$.

Démo : Notons $A = (a_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Alors, $${}^tXAY = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} y_j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} x_i y_j .$$

$$\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i y_j \underbrace{\varphi(e_i, e_j)}_{a_{ij}} = {}^tXAY .$$

Théorème : $$\begin{array}{ccc} FBS(\mathbb{K}) & \to & S_n(\mathbb{K}) \\ \varphi & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{array}$$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Démo : • *Linéarité :* Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, φ, ψ deux fbs.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha\varphi + \psi) = ((\alpha\varphi + \psi)(e_i, e_j))_{1 \leq i \leq j \leq n}$

et $(\alpha\varphi + \psi)(e_i, e_j) = \alpha\varphi(e_i, e_j) + \psi(e_i, e_j) = (\alpha \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi))_{ij}$ pour tous $1 \leq i \leq j \leq n$.

Donc, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha\varphi + \psi) = \alpha \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$

• *Surjectivité :* Soit $A \in S_n(\mathbb{K})$. Pour tous x, y, on pose $\varphi(x,y) = {}^tXAY$ où $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

Alors : $\varphi(y,x) = {}^tYAX = {}^t({}^tXAY) = {}^t\varphi(x,y) = \varphi(x,y)$.

Donc, φ est symétrique.

Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, x', y \in E$:

$$\varphi(\alpha x + x', y) = {}^t(\alpha X + X')AY = \alpha\, {}^tXAY + {}^tX'AY = \alpha \varphi(x,y) + \varphi(x',y).$$

On prouve de la même manière la linéarité en la seconde variable.

φ est donc bilinéaire.

De plus, $\varphi(e_i, e_j) = {}^tE_i A E_j = a_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

Donc, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$.

- Injectivité : Si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = 0$, alors pour tous i,j, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

  Donc, $\varphi = 0$ par bilinéarité.

Corollaire : $\dim(FBS(\mathbb{K})) = \dim(S_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Déf : Soient $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une fbs et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :

$\mathrm{Rg}(\varphi) = \mathrm{Rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))$.

Proposition : $\mathrm{Rg}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\ker \varphi)$. (en particulier $\mathrm{Rg}(\varphi)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$).

Démo : $x \in \ker(\varphi) \iff \forall y \in E,\ \varphi(x,y) = 0$

$\iff \forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{K}),\ {}^tXAY = 0$ où $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$\iff {}^tXA = 0$

$\iff {}^t({}^tXA) = 0 = {}^tAX = AX$.

$\iff X \in \ker(A)$

Puis, par le théorème du rang, $\dim(\ker \varphi) = \dim(\ker(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)))$

$= n - \mathrm{Rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))$

$= \dim E - \mathrm{Rg}(\varphi)$.

<u>Théorème (changement de base)</u> : Soient $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ une fbs sur un $\mathbb{K}$-ev de dim finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')$

Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tP\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\, P$.

<u>Démo</u> : Soient $x, y \in E$, Posons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$

$Y' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(y)$. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

$\varphi(x,y) = {}^tX A Y = {}^t(PX')A(PY')$

$= {}^tX'\, {}^tPAP\, Y'$

Donc, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tPAP$ car $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\cdot)$ est un isomorphisme.

<u>Théorème</u> : Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie et $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ une fbs

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> : 1- On n'a pas diagonalisé. Matriciellement, ce théorème signifie que $\forall A \in S_n(\mathbb{K})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exists D \in \mathrm{Diag}_n(\mathbb{K})$, $A = PD\,{}^tP$.

2- Ce théorème implique que pour toute forme quadratique q, il existe des formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tq.

$$q(x) = \sum \lambda_i\, \varphi_i(x)^2$$

<u>Démo</u> : On raisonne par récurrence sur n. L'énoncé est vrai pour $n=1$.

Supposons l'énoncé vérifié pour $n-1$, $n \geq 2$.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ une fbs.

- 1^e cas : pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) = 0$. Alors, toute base convient.
- 2^e cas : $\exists a \in E$, $\varphi(a,a) \neq 0$. Posons $D = \mathrm{Vect}(a)$ et $F = \{x \in E \mid \varphi(x,a) = 0\}$. Alors $E = D \oplus F$. En effet :

- Soit $x \in D \cap F$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $x = \lambda a$ et $\varphi(a,a) = 0$

$= \varphi(\lambda a, a) = \lambda \varphi(a,a)$. Donc, $\lambda = 0$. D'où $x = 0$

Donc, $D \cap F = \{0\}$

- Soit $x \in E$, alors $x = \underbrace{\frac{\varphi(x,a)}{\varphi(a,a)} a}_{\in D} + \underbrace{x - \frac{\varphi(x,a)}{\varphi(a,a)} a}_{\in F}$

$$\varphi\left(x - \frac{\varphi(x,a)}{\varphi(a,a)} a, a\right) = \varphi(x,a) - \frac{\varphi(x,a)}{\varphi(a,a)} \varphi(a,a)$$
$$= \varphi(x,a) - \varphi(x,a) = 0.$$

On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à F.

(puisque $\dim F = \dim E - \dim D = n-1$).

III - Propriétés propres au cas réel

Déf : Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une fbs. On note q la forme quadratique associée. On dit que φ est positive si $\forall x \in E$, $q(x) \geq 0$. On dit que φ est négative si $\forall x \in E$, $q(x) \leq 0$.

Prop : Si q est une forme quadratique réelle définie, alors q est de signe constant.

Démo : Montrons la contraposée.

Supposons qu'il existe $x, y \in E$ tels que $q(x) > 0$, $q(y) < 0$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = q(tx+y) = t^2 q(x) + 2t\varphi(x,y) + q(y)$.

$f(t)$ est un polynôme de degré 2 en t.

Le discriminant est $\Delta = \underbrace{4\varphi(x,y)^2}_{\geq 0} \underbrace{- 4 \underbrace{q(x)}_{>0} \underbrace{q(y)}_{<0}}_{>0} > 0$.

Donc, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tq $0 = f(t_0) = q(t_0 x + y)$.

Supposons par l'absurde que $t_0 x + y = 0$, alors $y = -t_0 x$.

Donc, $0 > q(y) = q(-t_0 x) = t_0^2 q(x) \geq 0$. Contradiction !

Donc, $t_0 x + y \neq 0$ et $q(t_0 x + y) = 0$. Donc, q n'est pas définie.

<u>Remarque</u> : La réciproque est fausse. $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $q(x,y) = x^2$. Alors, $q \geq 0$ mais $C_q = \mathbb{R}e_2 \neq \{0\}$. Donc, q n'est pas définie.

<u>Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)</u> : Soit q une forme quadratique réelle de signe constant (par exemple définie). Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ sa forme polaire. Alors, $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$.

<u>Démo</u> : Soit $x, y \in E$. On pose $f(t) = q(tx + y)$ où $t \in \mathbb{R}$.

$$= t^2 q(x) + 2t\varphi(x,y) + q(y).$$

- 1ᵉ cas : $q(x) \neq 0$

  Puisque f est un polynôme de degré 2 de signe constant, on sait que $\Delta = 4\varphi(x,y)^2 - 4q(x)q(y) \leq 0$.

  $\Rightarrow \varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$

- 2ᵉ cas : $q(x) = 0$

  Alors $f(t) = 2t\varphi(x,y) + q(y)$ est de signe constant.

  Donc, $\varphi(x,y) = 0$; $\varphi(x,y)^2 = 0 \leq q(x)q(y) = 0$.

<u>Corollaire</u> : Si q est une forme quadratique réelle de signe constant (par exemple si q est définie), alors $\operatorname{Ker}\varphi = C_q$.

<u>Démo</u> : • $\operatorname{Ker}\varphi \subset C_q$ est toujours vraie.

Soit $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $\forall y \in E$, $\varphi(x,y) = 0$.

En particulier, $q(x) = \varphi(x,x) = 0$, donc $x \in C_q$.

• $C_q \subset \ker \varphi$.

Soit $x \in C_q$, alors $q(x) = 0$

Soit $y \in E$, alors, d'après Cauchy-Schwartz,

$0 \leq \varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y) = 0$. Donc, $\varphi(x,y) = 0$.

On a montré que pour tout $y \in E$, $\varphi(x,y) = 0$, ie. $x \in \ker \varphi$.

<u>Corrolaire</u> : Soit q une forme quadratique réelle, alors φ est définie positive $\Leftrightarrow$ φ non-dégénérée positive.

φ est définie négative $\Leftrightarrow$ φ non-dégénérée négative.

<u>Corrolaire : (cas d'égalité de Cauchy-Schwartz)</u>. Soit q une forme quadratique non dégénérée et positive.

$\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y)^2 = q(x)q(y) \Leftrightarrow (x,y)$ liée.

<u>Démo :</u> <u>$\Leftarrow$)</u> Supposons (x,y) liée.

• 1^e cas : $x = 0$

Alors $\varphi(x,y)^2 = 0 = q(x)q(y)$

• 2^e cas : $x \neq 0$

$y = \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(x,y) = \varphi(x, \lambda x)^2 = \lambda^2 \varphi(x,x)^2$

$= \lambda^2 q(x)q(x) = q(\lambda x)q(x) = q(y)q(x)$.

$\Rightarrow$) Supposons que $\varphi(x,y)^2 = q(x)q(y)$.

On pose $f(t) = q(tx+y) = t^2 q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$

où $t \in \mathbb{R}$.

• 1^e cas : $q(x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ car q est non dégénérée positive donc définies

$\Rightarrow (x,y)$ liée.

• 2e cas : $q(x) \neq 0$

Alors, $\Delta = 4\varphi(x,y)^2 - 4q(x)q(y) = 0$

Donc, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq $f(t_0) = 0$.

Donc, $q(t_0 x + y) = 0$.

Donc, $t_0 x + y = 0$ car q est définie.

Donc, $y = -t_0 x$.

Donc, (x,y) est liée.

<u>Théorème (Inégalité de Minkowski)</u>: Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique réelle positive. Alors, $\forall x, y \in E$,
$\sqrt{q(x,y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$.
(C'est ce qui donne l'inégalité triangulaire pour une norme provenant d'un produit scalaire).

<u>Démo</u>: Soient $x, y \in E$.

$$\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$$
$$\iff q(x+y) \leqslant q(x) + q(y) + 2\sqrt{q(x)q(y)}$$
$$\iff q(x) + q(y) + 2\varphi(x,y) \leqslant q(x) + q(y) + 2\sqrt{q(x)q(y)}$$
$$\iff \varphi(x,y) \leqslant \sqrt{q(x)q(y)}$$
$$\iff \varphi(x,y)^2 \leqslant q(x)q(y)$$

<u>Remarque (Cas d'égalité Minkowski)</u>: Soient $x, y \in E$, alors $\sqrt{q(x+y)} = \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} \iff (x,y)$ est une famille positivement liée ie. $\exists t \in [0, +\infty[$, $x = ty$ ou $y = tx$.

<u>Théorème de Sylvester</u>: Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique réelle de forme polaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$

une base de E telle que $i \neq j \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0$.

On définit la signature de q par (a,b) où $a = \#\{i = 1, \dots, n,\ q(e_i) > 0\}$ et $b = \#\{i = 1, \dots, n,\ q(e_i) < 0\}$.

Alors, (a,b) ne dépend pas du choix de la base et $\text{rang}(\varphi) = a+b$. (ie. si B est telle que $\text{Mat}_B \varphi$ est diagonale, a est le nb d'éléments positifs et b le nb d'éléments négatifs).

<u>Démo</u> : Soit $B = (e_1, \dots, e_a, e_{a+1}, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots f_{a'}, f_{a'+1}, \dots, f_n)$, deux bases conjuguées. Posons $D = (e_1, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$.

Montrons que D est libre.

Soient $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^{a} \lambda_i e_i + \sum_{j=a+1}^{n} \mu_j f_j = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{a} \lambda_i e_i = -\sum_{j=a+1}^{n} \mu_j f_j. \Rightarrow q\left(\sum_{i=1}^{a} \lambda_i e_i\right) = q\left(-\sum_{j=a+1}^{n} \mu_j f_j\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum \lambda_i^2 \underbrace{q(e_i)}_{>0}}_{\geq 0} = \underbrace{\sum \mu_j^2 \underbrace{q(f_j)}_{\leq 0}}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \forall i,\ \lambda_i = 0 \text{ et } \forall j,\ \mu_j = 0.$$

Donc, D est libre. Donc, $a \leq a'$.

<u>Exemple</u> : $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1(x_2 + x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3.$$

$$= (x_1 - x_2 - x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1 - x_2 - x_3)^2 - 4x_2x_3$$

$$= (x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - (x^2 + x^3)^2.$$

Donc, la signature de q est $(2,1)$ et le rang de $q = 2 + 1 = 3$.

IV - Espaces euclidiens

Def : Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Un produit scalaire sur E est une fbs $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie positive.

1 - $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$

2 - $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Def : Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire que l'on note également $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Exemples : 1 - $E = \mathbb{R}^n$. $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

2 - $E = M_{n,p}(\mathbb{R})$. $\langle A, B \rangle = tr({}^tAB)$.

Notation : Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien. La norme associée est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in E$.

Elle vérifie
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ $(x \in E)$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{R}, x \in E)$
- $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire).

Cauchy - Schwartz : $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \|x\| \|y\|$

Minkowski : $\forall x, y \in E$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Def : Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien
- On dit que x, y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.
- Pour $A \subset E$, on définit l'orthogonale de A par $A^\perp = \{x \in E : \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$.
- On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale si $\forall i, j \in I$, $i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$.

- On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale et $\forall i \in I$, $\|x_i\| = 1$.

<u>Prop</u> : Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

<u>Démo</u> : Soit $(x_i)_{i \in I}$ orthogonale. Soit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Soit $j \in I$.

$$\left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i , x_j \right\rangle = \langle 0, x_j \rangle = 0 ,$$

$$\left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i , x_j \right\rangle = \lambda_j \underbrace{\|x_j\|}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_j = 0$$

Donc, $\forall j$, $\lambda_j = 0$. La famille est libre.

<u>Algorithme de Gram-Schmidt</u> : Soit $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille libre. Alors, il existe $(v_1, \dots, v_p)$ une famille orthogonale telle que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

<u>Démo</u> : $v_1 = e_1$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle v_1, e_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$\vdots$$

$$v_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_i, e_k \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

<u>Corrolaire</u> : Un espace euclidien admet une base orthogonale.

<u>Démo</u> : Appliquer Gram-Schmidt à une base.

<u>Remarque</u> : Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale (bon), alors $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Prop : Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace euclidien, alors :

1 - $\mathcal{B}$ base orthogonale ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot , \cdot \rangle) \in \mathrm{Diag}$.

2 - $\mathcal{B}$ base orthonormale ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot , \cdot \rangle) = I_n$.

Propriété : Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E un espace euclidien, alors $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = ({}^t \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x) \cdot (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, y)$.

V - Adjoint

Théorème : Soient $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

De plus, si $\mathcal{B}$ est une bon de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)$. On dit que f^* est l'adjoint de f.

Remarque : L'hypothèse $\dim E < +\infty$ est cruciale pour l'existence.

Démo : • Unicité : Supposons qu'il existe deux f^* et $\tilde{f}^*$ vérifiant la propriété énoncée. Soit $x, y \in E$. $\langle f(y), x \rangle = \langle y, f^*(x) \rangle = \langle y, \tilde{f}^*(x) \rangle$.

$\Rightarrow \langle y, f^*(x) - \tilde{f}^*(x) \rangle = 0$.

Donc, $\forall y \in E$, $\langle y, f^*(x) - \tilde{f}^*(x) \rangle = 0$.

Donc, $f^*(x) - \tilde{f}^*(x) \in E^{\perp} = \{0\}$.

Donc, $f^*(x) = \tilde{f}^*(x)$.

• Existence : Soit $\mathcal{B}$ une bon de E. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, g = {}^t A$

$\langle f(x), y \rangle = {}^t(AX) Y = {}^t X \, {}^t A Y = {}^t X (BY) = \langle x, g(y) \rangle$.

Prop : $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$
- $id^* = id$
- $(f^*)^* = f$
- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Def : Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que f est symétrique (ou auto-adjoint) si $f^* = f$.
- On dit que f est orthogonale si $f^* \circ f = id$.
- On dit que f est antisymétrique si $f^* = -f$.

Notation : · $S(E) = \{ f \in \mathcal{L}(E) : \text{symétrique} \}$.

· $O(E) = \{ f \in \mathcal{L}(E) : \text{orthogonaux} \}$.

Prop : Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in S(E)$

$\iff \forall x, y \in E,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

$\iff \forall \mathcal{B}$ bon. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est symétrique.

Prop : $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$.

$f \in O(E) \iff \forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$\iff \forall x, y \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

$\iff \forall \mathcal{B}$ bon, $f(\mathcal{B})$ bon $\iff \exists \mathcal{B}$ bon, $f(\mathcal{B})$ bon

Def : $O_n(\mathbb{R}) := \{ \mathrm{Mat}_c f : f \in O(\mathbb{R}^n) \}$: ensemble des matrices orthogonales pour le produit scalaire usuel et la base canonique.

Prop : Soit $\Omega \in M_n(\mathbb{R})$, alors :

$\Omega \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t\Omega\,\Omega = I_n$

$\Leftrightarrow \Omega\,{}^t\Omega = I_n$

$\Leftrightarrow$ les colonnes de Ω forment une bon.

$\Leftrightarrow$ les lignes de Ω forment une bon.

Prop : $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif.

ie. si $\Omega_1, \Omega_2 \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\Omega_1\Omega_2 \in O_n(\mathbb{R})$

si $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\Omega^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Prop : Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien. Soit B une bon et B' une base

Alors, B' bon $\Leftrightarrow P_{B,B'} \in O_n(\mathbb{R})$.

VI - Réduction des matrices symétriques

Théorème spectral : • Soient $(E, <.,.>)$ un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors,

f est orthogonalement diagonalisable, ie. $\exists B$ bon tq $Mat_B f$ est diagonale.

• $\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \exists D \in Diag_n(\mathbb{R}), \exists \Omega \in O_n(\mathbb{R})$ tq $S = \Omega D \Omega^{-1} = \Omega D\,{}^t\Omega$.

Démo : Par récurrence sur $\dim E = n$.

Soit E un espace euclidien de dim $n+1$.

Alors, f admet une vp $\lambda \in \mathbb{R}$, et $e_1 \in SEP(f, \lambda)$.

Soit $F = \langle e_1 \rangle^\perp$.

Alors, $f_{|F} \in S(F)$.

Par hypothèse de récurrence, $\exists (e_2, \dots, e_n)$ orthonormale tq $F = \langle e_2, \dots, e_n \rangle$

et $B = (e_1, \dots, e_n)$ convient.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & * \end{pmatrix}$$

<u>Lemme</u> : Les valeurs propres complexes de $f \in S(E)$ sont réelles.

<u>Démo</u> : Voir TD n° 5.

<u>Lemme</u> : Les SEP de $f \in S(E)$ sont orthogonaux.

<u>Démo</u> : Voir TD n° 5.

<u>Lemme</u> : F stable par $f \Rightarrow F^{\perp}$ est stable par f^*.

<u>Démo</u> : Voir TD n° 5.