

Chapitre II - Réduction des endomorphismes:

1) Éléments propres:

Def: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -ev de dim. finie.

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre (vp) de f s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

On dit que x est un vecteur propre ($\vec{v}$) de f pour λ .

Def: Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une vp de A s'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.

On dit alors que X est un $\vec{v}$ de A pour λ .

Notations: L'ensemble des valeurs propres de f (resp. A) est le spectre de f (resp. A).

$$S_{\text{PK}}(f) := \{ \lambda \in \mathbb{K} : \exists x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \lambda x \}.$$

$$S_{\text{PK}}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{K} : \exists X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, AX = \lambda X \}.$$

On note $\text{SEP}(f, \lambda) := \ker(f - \lambda \text{Id})$
(ou E_λ)

$$\text{SEP}(A, \lambda) := \ker(A - \lambda I_n).$$

le sous-espace propre de f (resp. A) associé à λ .
(Δ c'est l'ensemble des $\vec{v}$ + le vecteur nul).

Remarque:

$$\lambda \in S_{\text{PK}}(f) \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow \ker(f - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id}) \text{ n'est pas injective.}$$

$$\Leftrightarrow (f - \lambda \text{Id}) \text{ n'est pas surjective.}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \in S_{PK}(A) &\Leftrightarrow \exists X \in M_{m \times 1}(K) \setminus \{0\}, AX = \lambda X. \\
&\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_m) \neq \{0\} \\
&\Leftrightarrow A - \lambda I_m \notin GL_m(K) \\
&\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_m) = 0.
\end{aligned}$$

Prop: Soit $\lambda \in S_{PK}(f)$.

Alors E_λ est un sous-espace vectoriel stable par f .
 $(f(E_\lambda) \subset E_\lambda)$

Δ : $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{Id})$ est un SEV car c'est le noyau de $f - \lambda \text{Id}$ linéaire.

Soit $x \in E_\lambda$, on veut montrer que $f(x) \in E_\lambda$.

$$\begin{aligned}
f(f(x)) &= f(\lambda x) = \lambda f(x) \\
&\quad \begin{array}{c} \downarrow \text{car } x \in E_\lambda \\ \downarrow \text{linéarité} \end{array}
\end{aligned}$$

Donc $f(x) \in E_\lambda$. $\square$

Remarque: Donc $f|_{E_\lambda} \in \mathcal{L}(E_\lambda)$

$$\begin{aligned}
f|_{E_\lambda} : E_\lambda &\rightarrow E_\lambda \\
x &\mapsto \lambda x
\end{aligned}$$

($f|_{E_\lambda}$ est une homothétie de E_λ de rapport λ).

Remarque: $A = \text{Mat}_{B,B}(f)$; $X = \text{Mat}_B(x)$.

Alors $AX = \lambda X \Leftrightarrow f(x) = \lambda x$ d'où $S_{PK}(f) = S_{PK}(A)$.
 et l'identification $\text{SEP}(f, \lambda) \leftrightarrow \text{SEP}(A, \lambda)$
 $x \leftrightarrow \text{Mat}_B(x)$.

Prop: Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.

Δ : On va démontrer par récurrence sur $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ que si $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont des λ distinctes de f , alors les $\text{SEP}(f, \lambda_1), \dots, \text{SEP}(f, \lambda_N)$ sont en somme directe:

Initialisation: OK.

Hérédité: Supposons le résultat vrai pour N

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_{N+1}$ des vp distinctes de f .

Soient $x_i \in \text{SEP}(f, \lambda_i)$, $i = 1, \dots, N+1$, tels que:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{N+1} = 0. \quad (1)$$

On veut montrer que $x_1 = x_2 = \dots = x_{N+1} = 0$.

En appliquant f à (1), on obtient:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{N+1} x_{N+1} = 0 \quad (2)$$

(2) - λ_{N+1} (1) donne:

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{N+1}) x_1}_{\in E_{\lambda_1}} + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_{N+1}) x_2}_{\in E_{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{(\lambda_N - \lambda_{N+1}) x_N}_{\in E_{\lambda_N}} = 0.$$

Or $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_N}$ sont en somme directe par l'hypothèse de récurrence. Donc $\forall i = 1, \dots, N$, $(\lambda_i - \lambda_{N+1}) x_i = 0$.

donc $\forall i = 1, \dots, N$, $x_i = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_{N+1}$.

puis $x_{N+1} = -x_1 - x_2 - \dots - x_N = 0$ (par (1)).

On a bien montré que $x_1 = \dots = x_N = x_{N+1} = 0$

et donc que $\text{SEP}(f, \lambda_1), \dots, \text{SEP}(f, \lambda_N), \text{SEP}(f, \lambda_{N+1})$ sont en somme directe. $\square$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{R}), \text{ Spectre ? , SEP ? .}$$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$, $X \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ tels que $AX = \lambda X$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_m = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = \lambda x_m \end{cases} \quad (1)$$

1^{er} cas:

$\lambda = 0$; on obtient (1) $\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_m = 0$.

qui admet au moins une solution non-nulle: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $0 \in S_{\text{PR}}(A)$, $\text{SPE}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + \dots + x_m = 0 \right\}$

2ème cas :

$$\lambda \neq 0 : \text{on obtient : } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_m = \lambda x_1 \\ 0 = \lambda(x_2 - x_1) : L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ 0 = \lambda(x_m - x_1) : L_m \leftarrow L_m - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_m = \lambda x_1 \\ x_2 = x_1 \text{ car } \lambda \neq 0 \\ \vdots \\ x_m = x_1 \text{ car } \lambda \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_m \\ (\lambda - m)x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dots = x_m \\ \lambda = m \end{cases}$$

Donc $m \in S_{\text{PR}}(A)$ et $\text{SEP}(A, m) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$.

(2) Diagonalisabilité :

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -ev de dim. finie.
On dit que f est diagonalisable s'il existe B une base de E telle que $\text{Mat}_{B,B}(f)$ est diagonale.

Remarque : si $B = (e_1, \dots, e_m)$ est une base de E alors

$$\text{Mat}_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Def : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est diagonalisable s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale tel que $A = P D P^{-1}$

chgt de base à l'arrivée pour la m base
chgt de base au départ pour la m base.

Donc A est diagonalisable si c'est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable pour une certaine base.

Théorème: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un K -ev de dim. finie.
Les propriétés ^{suivantes} sont équivalentes :

- ① f est diagonalisable.
- ② E admet une base formée de $\vec{v}$.
- ③ $E = \text{SEP}(f, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{SEP}(f, \lambda_s)$; où $S_{PK}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$
- ④ $\dim E = \dim(\text{SEP}(f, \lambda_1)) + \dots + \dim(\text{SEP}(f, \lambda_s))$.

Δ : ① $\Rightarrow$ ②. Supposons f diagonalisable.

Donc $\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{Mat}_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: A$.

ième position

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(e_i) = \lambda_i e_i \quad (*)$$

(*) $A = \text{Mat}_{B,B} f$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_B(e_i)$

donc
 $\text{Mat}_B(f(e_i)) = \text{Mat}_{B,B} f \cdot \text{Mat}_B(e_i)$
 $= A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $f e_i \neq 0 \leftarrow$ car élément d'une base
 $f(e_i) = \lambda_i e_i$; i.e : e_i est un $\vec{v}$ de f .

Donc B est une base formée de $\vec{v}$.

② $\Rightarrow$ ③ Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ formée de $\vec{v}$.

i.e: $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour $\lambda_i \in K$.

$$E = \sum_{i=1}^n K e_i \subset \sum_{i=1}^n \ker(f - \lambda_i \text{id}) \subset \sum_{\lambda \in S_{PK}(f)} \ker(f - \lambda \text{id})$$

$$= \sum_{\lambda \in S_{PK}(f)} \text{SEP}(f, \lambda) = \bigoplus_{\lambda \in S_{PK}(f)} \text{SEP}(f, \lambda) \subset E$$

déjà démontré.
 (SEP en somme directe)

donc $E = \bigoplus_{\lambda \in S_{PK}(f)} \text{SEP}(f, \lambda)$

③ $\Rightarrow$ ④ $\dim E = \dim \left(\bigoplus_{\lambda \in S_{PK}(f)} \text{SEP}(f, \lambda) \right)$

cf TD n°1 $\rightarrow \sum_{\lambda \in S_{PK}(f)} \dim \text{SEP}(f, \lambda)$.

④ $\Rightarrow$ ① Supposons $S_{PK}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$

Soit $B_i = (e_1^i, \dots, e_{\alpha_i}^i)$ une base de $\text{SEP}(f, \lambda_i)$.

Posons $B = (e_1^1, \dots, e_{\alpha_1}^1, \dots, e_1^k, \dots, e_{\alpha_k}^k)$.

Montrons que B est une base de E .

Soient $\alpha_i^j \in \mathbb{K}$ tels que

$$\underbrace{\alpha_1^1 e_1^1 + \dots + \alpha_{n_1}^1 e_{n_1}^1}_{\in \text{SEP}(f, \lambda_1)} + \dots + \underbrace{\alpha_1^k e_1^k + \dots + \alpha_{n_k}^k e_{n_k}^k}_{\in \text{SEP}(f, \lambda_k)} = 0.$$

Puisque les SEP sont en $\oplus$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1^1 e_1^1 + \dots + \alpha_{n_1}^1 e_{n_1}^1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1^k e_1^k + \dots + \alpha_{n_k}^k e_{n_k}^k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1^1 = \dots = \alpha_{n_1}^1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1^k = \dots = \alpha_{n_k}^k = 0 \end{cases} \quad \text{puisque les } B_i \text{ sont libres.}$$

Donc B est une famille libre.

② De plus, $\#B = \sum_{i=1}^k \#B_i = \sum_{i=1}^k \dim \text{SEP}(f, \lambda_i) = \dim E$.
Donc B est une base de E et

$$\text{Mat}_B f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \alpha_1 \\ \uparrow \alpha_2 \\ \uparrow \alpha_k \end{matrix} \quad \square$$

③ Polynôme caractéristique :

Motivation : λ est une valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{K})$, s'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}.$$

$$\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible.}$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Def : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On pose $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Proposition :

- $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$, (χ_A est un polynôme).
- $\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + \det A$.

Δ: Supposons que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$$\text{alors } A - XI_n = \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} - x & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \sigma_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \alpha_{\sigma(i), i}$$

$$\rightarrow \sigma_n = \{ \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\text{bij}} \{1, \dots, n\} \}.$$

- Si $\sigma \neq \text{id}$, il y a au moins deux i tels que $\sigma(i) \neq i$.
Donc $\prod \alpha_{\sigma(i), i}$ est un polynôme de degré $\leq n-2$.
- Si $\sigma = \text{id}$, alors $\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \alpha_{\sigma(i), i} = 1 \cdot \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$.

$$\begin{aligned} & (a_{11} - x)(a_{22} - x)(a_{33} - x) \dots (a_{nn} - x) \\ &= (-x)^n + \sum_{i=1}^n a_{ii} (-x)^{n-1} + \dots \\ &= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) x^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

- Si $x = 0$,

$$\chi_A(0) = \det(A - 0I_n) = \det A \quad (\text{c'est le terme constant}).$$

Proposition: Soient $A, B \in M_n(K)$, $P \in GL_n(K)$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors $\chi_A = \chi_B$.

$$\begin{aligned} \Delta: \chi_A(x) &= \det(A - xI_n) = \det(PBP^{-1} - xI_n) = \det(P(B - xI_n)P^{-1}) \\ &= \det(P) \times \det(B - xI_n) \times \det(P^{-1}) = \det(B - xI_n) = \chi_B. \end{aligned}$$

Def: Soient E un K -ev de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors le polynôme caractéristique de f est $\chi_f := \chi_{\text{Mat}_B f}$.

Remarque: χ_f ne dépend pas des choix de la base B de E , d'après la proposition précédente.

Proposition: Soit $A \in M_n(K)$, alors $S_{PK}(A) = \chi_A^{-1}(\{0\})$.
 • Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim_K E < \infty$, alors $S_{PK}(f) = \chi_f^{-1}(\{0\})$.

Δ : Soit $\lambda \in K$,

$$\lambda \in S_{PK}(A) \Leftrightarrow \exists X \in M_{n,1}(K) \setminus \{0\}, AX = \lambda X.$$

$$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}.$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0.$$

□

Corollaire: Si $A \in M_n(K)$, $\# S_{PK}(A) \leq n$.

• Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\# S_{PK}(f) \leq \dim_K E$.

Δ : $S_{PK}(A) = \chi_A^{-1}(\{0\})$ et $\deg \chi_A = n$. □

Proposition: Soient E un K -ev de dim. finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in S_{PK}(f)$

$$\text{Alors } 1 \leq \dim(\text{SEP}(f, \lambda)) \leq \underbrace{\text{mult}_\lambda(\chi_f)}_{\substack{\text{multiplicité de } \lambda \\ \text{comme racine de } \chi_f}}.$$

Δ : $\lambda \in S_{PK}(f) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$.

$$\text{donc } \dim(\text{SEP}(f, \lambda)) = \dim(\ker(f - \lambda \text{Id})) \geq 1$$

• Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $\text{SEP}(f, \lambda)$, que l'on complète en une base $B = (e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n)$ de E .

$$\text{Puisque } f(e_1) = \lambda e_1, \dots, f(e_d) = \lambda e_d.$$

$$\text{On a: } \text{Mat}_B f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & C \\ 0 & \lambda & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow d \\ \uparrow m-d \end{matrix}$$

$$\text{donc } \chi_f(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda-x & 0 & C \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & D-xI_{m-d} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda-x & 0 \\ 0 & \lambda-x \end{pmatrix} \det(D-xI_{m-d})$$

$$= (\lambda - x)^d \cdot \frac{\det(D - XI_{n-d})}{(\lambda - x)^\delta Q(x)} \text{ où } \delta \geq 0.$$

Donc $\text{mult}_\lambda(\chi_f) \geq d = \dim \text{SEP}(f, \lambda)$. $\square$

Théorème: Soient E un K -ev de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors,

χ_f est scindé $\chi_f = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)^{\delta_i}$.

f est diagonalisable $\Leftrightarrow \left[\forall \lambda \in S_{p_K}(f), \text{mult}_\lambda(\chi_f) = \dim \text{SEP}(f, \lambda) \right]$.

$\Delta: \Rightarrow$ Supposons que f soit diagonalisable alors il existe une base B de E telle que $\text{Mat}_B f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } \chi_f(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - x \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - x).$$

Donc χ_f est scindé.

$$\text{Puis } n = \sum_{\lambda \in S_{p_K}(f)} \dim \text{SEP}(f, \lambda) \leq \sum_{\lambda \in S_{p_K}(f)} \text{mult}_\lambda \chi_f \leq n$$

$$\text{donc } \forall \lambda \in S_{p_K}(f), \dim \text{SEP}(f, \lambda) = \text{mult}_\lambda(\chi_f).$$

$\Leftarrow$ Si χ_f est scindé, alors

$$\sum_{\lambda \in S_{p_K}(f)} \text{mult}_\lambda(\chi_f) = n = \dim E.$$

$$\text{Donc } n = \sum_{\lambda \in S_{p_K}(f)} \text{mult}_\lambda(\chi_f) = \sum_{\lambda \in S_{p_K}(f)} \dim \text{SEP}(f, \lambda) \leq \sum_{\lambda \in S_{p_K}(f)} \text{mult}_\lambda(\chi_f) = n$$

$$\text{donc } \sum_{\lambda \in S_{p_K}(f)} \dim \text{SEP}(f, \lambda) = n = \dim E.$$

Donc f est diagonalisable. $\square$

Corollaire:

χ_f admet $n = \deg(\chi_f)$ racines distinctes.

$\Rightarrow \# S_{p_K}(f) = \dim_K E$.

$\Rightarrow f$ est diagonalisable.

(La réciproque est fautive)

Δ: Supposons que f soit diagonalisable alors $\exists$ une base B de E tel que $M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

donc $\chi_f(X) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - X & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - X \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$.

donc χ_f est scindé.

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \dim \text{SEP}(f, \lambda) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \text{mult}_\lambda \chi_f = n.$$

Donc $\forall \lambda \in \text{Sp}_K(f), \dim \text{SEP}(f, \lambda) = \text{mult}_\lambda \chi_f$.

⊕ Si χ_f est scindé

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \text{mult}_\lambda \chi_f = n = \dim E.$$

donc $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \text{mult}_\lambda \chi_f \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \dim \text{SEP}(f, \lambda) \leq n$.

donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \dim \text{SEP}(f, \lambda) = n = \dim E$

Donc f est diagonalisable.

Corollaire: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ (resp $f \in \mathcal{L}(E)$) où E est un K -ev de dim. finie.

Si χ_A (resp χ_f) est scindé à racines simples, alors A (resp f) est diagonalisable.

4) Triagonalisabilité:

Def: Soit $T = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice.

On dit que T est triangulaire supérieure si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

i.e: $T = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Remarque: Une matrice triangulaire inférieure est toujours semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(K)$, alors

$$P \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 1 & t_{nn} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{1n} \\ 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Def: Soit E un K -ev de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est trigonalisable si il existe une base B de E telle que $\text{Mat}_{BB}(f)$ soit triangulaire.

Def: On dit que $A \in M_n(K)$ est trigonalisable si $\exists P \in GL_n(K)$ et $T \in M_n(K)$ triangulaire telle que $A = PTP^{-1}$.

Théorème: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un K -ev de dim. finie (resp. $A \in M_n(K)$) alors f (resp. A) est trigonalisable si χ_f (resp. χ_A) est scindé.

Δ : $\Rightarrow$ Supposons A trigonalisable, alors $A = PTP^{-1}$ où $P \in GL_n(K)$ et $T = \begin{pmatrix} t_{11} & * \\ 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } \chi_A(x) = \chi_T(x) = \det \begin{pmatrix} t_{11} - x & * \\ 0 & t_{nn} - x \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (t_{ii} - x)$$

$\Leftarrow$ Par récurrence, sur $n = \dim_K E$.

Init au rang $n=1$. OK.

Hérédité: Supposons le critère vrai pour n et montrons le pour $n+1$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim_K E = n+1$ tq χ_f est scindé.

Puisque χ_f est scindé, $\exists \lambda \in K$ tq $\chi_f(\lambda) = 0$

i.e: λ est une vp de f

Donc $\exists v \neq 0$ tq $f(v) = \lambda v$.

On complète v en une base $B = (v, e_1, \dots, e_n)$ de E et

$$A := \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{\tilde{A}} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n \\ \leftarrow n \end{matrix} \quad \text{où } \tilde{A} \in M_n(K).$$

Puis $\chi_A(x) = (x - \lambda)^n \chi_{\tilde{A}}(x)$.

Puisque $\chi_{\tilde{A}}$ est scindé, il en est de même pour χ_A .

Par HR, $\tilde{A}$ est trigonalisable, i.e. $\exists Q \in GL_n(K)$ et $T \in M_n(K)$ triangulaire telle que $QTQ^{-1} = \tilde{A}$.

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K)$,
 alors $P \in GL_{n+1}(K)$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et on vérifie que
 $A = P \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & T \end{pmatrix} P^{-1}$ $\square$

Corollaire: Si $K = \mathbb{C}$, alors

- $f \in \mathcal{L}(E)$ (où E est un $\mathbb{C}$ -ev de dim finie) est trigonalisable
- $A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Δ : D'après le thm de D'Alembert - Gauss, χ_f (resp. χ_A) est scindé sur $\mathbb{C}$. $\square$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

alors $\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 5-x & -17 & 25 \\ 2 & -9-x & 16 \\ 1 & -5 & 9-x \end{vmatrix}$
 $= (5-x) \begin{vmatrix} -9-x & 16 \\ -5 & 9-x \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -17 & 25 \\ -5 & 9-x \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -17 & 25 \\ -9-x & 16 \end{vmatrix}$
 $= -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = (x-2)^2 (x-1).$

donc $S_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$

$x \in \text{SEP}(A, 2) \Leftrightarrow AX = 2X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 17y + 25z = 0 \\ 2x - 11y + 16z = 0 \\ x - 5y + 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow x \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Donc A n'est pas diagonalisable car $\dim \text{SEP}(A, 2) = 1 < \text{mult}_2 \chi_A = 2$

$$X \in \text{SEP}(A, 1) \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 17y + 25z = 0 \\ 2x - 10y + 16z = 0 \\ x - 5y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 11z \\ 3y = 7z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A est trigonalisable car χ_A est scindé.

On pose $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on cherche v_2 tq (v_1, v_2, v_3) soit une base et que dans cette base

$$\begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & Av_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \quad \text{ie: } Av_2 = x v_1 + 2v_2 \Leftrightarrow Av_2 - 2v_2 \in \text{Vect}(v_1).$$

Si on note $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors on obtient $\begin{pmatrix} 3x - 17y + 25z \\ 2x - 11y + 16z \\ x - 5y + 7z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}v_1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 17y + 25z = 3(x - 5y + 7z) \\ 2x - 11y + 16z = 2(x - 5y + 7z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{SEP}(A, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} x = 3z \\ y = 2z \end{matrix} \right\}$$

On prend $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $Av_2 = 2v_2 + v_1$.

Donc si on pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

5) Polynômes d'endomorphismes:

Def: $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in K[X]$

1) Si $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un K -ev, alors on pose

$$P(f) = a_0 \text{id} + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n \in \mathcal{L}(E), \text{ où } f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_k$$

2) Si $A \in M_n(K)$, alors

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n \in M_n(K).$$

Proposition:

$$\begin{aligned} \bullet (\alpha P + Q)(f) &= \alpha P(f) + Q(f) \\ \bullet (PQ)(f) &= P(f) \circ Q(f) \\ \bullet (1)(f) &= \text{id}. \end{aligned}$$

- $(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A)$
- $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$
- $(1)(A) = I_n$.

ie: $(K[X], +, \cdot, \times) \longrightarrow (\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$
 $P \longmapsto P(f)$.

est un morphisme d'algèbres unitaires.

Proposition: $P, Q \in K[X]$.

- si $A, B \in M_n(K)$ vérifient $AB = BA$, alors $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$.
- si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, où E est un K -ev, si $f \circ g = g \circ f$, alors $P(f) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(f)$.

Proposition: Soit $P \in K[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un K -ev, et $\lambda \in S_{P_K}(f)$. Alors $P(\lambda) \in S_{P_K}(P(f))$.

Δ : Soit $\lambda \in S_{P_K}(f)$ alors $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $f(x) = \lambda x$.
 Si $P(X) = x^k$, alors $P(f)(x) = f^k(x) = f^{k-1}(f(x))$.
 $= f^{k-1}(\lambda x) = \lambda f^{k-1}(x) = \dots = \lambda^k x$.

Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, alors $P(f)(x) = a_0 \text{id}(x) + \dots + a_n f^n(x)$.
 $= a_0 x + a_1 \lambda x + \dots + a_n \lambda^n x$.
 $= (a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n) x = P(\lambda) x$.

Donc $P(\lambda) \in S_{P_K}(P(f))$, puisque $x \neq 0$. $\square$

Def: • Si $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un K -ev ~~de dimension finie~~, on dit que $P \in K[X]$ est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$.
 ($P(f)$ est l'endomorphisme nul).

• Si $A \in M_n(K)$ et $P \in K[X]$, on dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$ (matrice nulle).

Proposition: Si P est un polynôme annulateur de f (resp. de A),
alors $\text{Sp}_K(f) \subset P^{-1}(0)$ (resp. $\text{Sp}_K(A) \subset P^{-1}(0)$).

Δ : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un K -ev de dim. finie, $P \in K[X]$
tel que $P(f) = 0$.
Soit $\lambda \in \text{Sp}_K(f)$. Alors $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
 $P(f)(x) = P(\lambda)x$
 $0(x) = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$ □

Commentaire: Si P est un polynôme annulateur de f (resp. A),
alors les vp de f (resp. A) sont racines de P .
 $\text{Sp}_K \subset P^{-1}(0)$.

Puisque $\chi_f^{-1}(0) = \text{Sp}_K(f)$, il est naturel de se demander
si $\chi_f(f) = 0$.

La réponse est oui, (c'est le théorème de Cayley-Hamilton
que l'on verra plus loin).

Théorème: Soient E un K -ev de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$
(resp. $A \in \mathcal{M}_n(K)$)

Alors f (resp. A) est diagonalisable si $\exists P \in K[X]$ scindé
à racines simples tel que $P(f) = 0$ (resp. $P(A) = 0$)

i.e: $P = \alpha \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ où $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.

Δ : $\Rightarrow$ Supposons f diagonalisable, donc il existe B une base
de E telle que $A = \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \text{Id}_{d_1} & & 0 \\ & \lambda_2 \text{Id}_{d_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \text{Id}_{d_r} \end{pmatrix}$
où $d_k = \dim \text{SEP}(f, \lambda_k)$ et
 $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.

Prenons $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$

Alors:

$$P(A) = \prod_{k=1}^r (A - \lambda_k I_n) = (A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) \dots (A - \lambda_r I_n)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & (\lambda_2 - \lambda_1) \text{Id}_2 & \\ 0 & & (\lambda_r - \lambda_1) \text{Id}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_2) \text{Id}_1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & (\lambda_r - \lambda_2) \text{Id}_r \end{pmatrix} \\ \dots \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_r) \text{Id}_1 & & 0 \\ & (\lambda_2 - \lambda_r) \text{Id}_2 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = 0$$

⊕ Supposons qu'il existe P scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$, de la forme $P = \prod_{k=1}^r (x - \lambda_k)$.

Posons $Q_i(x) = \prod_{k \neq i} (x - \lambda_k)$,

Alors $Q_i(\lambda_i) \neq 0$ et $Q_i(\lambda_k) = 0$ si $i \neq k$.

Soit $R = \sum_{i=1}^r \frac{Q_i(x)}{Q_i(\lambda_i)} - 1$ alors $\deg R \leq r-1$.
et $R(\lambda_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$.

Donc R est un polynôme de degré $\leq r-1$ avec au moins r racines, donc $R = 0$ donc $\sum_{i=1}^r \frac{Q_i(x)}{Q_i(\lambda_i)} = 1$.

Soit $x \in E$, alors $\sum_{i=1}^r \frac{Q_i(f)(x)}{Q_i(\lambda_i)} = x$

$$\begin{aligned} (f - \lambda_i \text{Id})(x_i) &= (f - \lambda_i \text{Id}) \left(\frac{\prod_{k \neq i} (f - \lambda_k)}{Q_i(\lambda_i)} \right) (x) \\ &= \underset{0}{\neq} \left[\prod_{k \neq i} (x - \lambda_k) \right] (f)(x) \\ &= x P(f)(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall i, x_i \in \text{SEP}(f, \lambda_i) = \ker(f - \lambda_i \text{Id})$

donc $x = \sum_{i=1}^r x_i \in \sum \text{SEP}(f, \lambda_i)$

donc $E = \sum_{i=1}^r \text{SEP}(f, \lambda_i)$

Donc f est diagonalisable. $\square$

Théorème: (Cayley - Hamilton)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un K -ev de dim. finie
(resp. $A \in M_n(K)$). Alors $\chi_f(f) = 0$ (resp. $\chi_A(A) = 0$).

Δ : Soit $n := \dim E$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ (On veut mtq $\chi_f(f)(x) = 0$).

On considère la famille: $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$,
qui est liée (car ayant $n+1$ éléments et $n+1 > n = \dim E$)

Donc, il existe $P_x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tq

$(x, f(x), \dots, f^{P_x-1}(x))$ est libre.

et $(x, f(x), \dots, f^{P_x}(x))$ est liée.

Donc $f^{P_x}(x) = \sum_{k=0}^{P_x-1} \alpha_k f^k(x)$.

Prenons $F_x = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{P_x-1}(x))$

Alors F_x est stable par f .

En effet, $f(x) \in F_x$

$f(f(x)) \in F_x$

$\vdots$

$f(f^{P_x-1}(x)) = f^{P_x}(x) = \sum_{k=0}^{P_x-1} \alpha_k f^k(x) \in F_x$.

Puisque $B = (x, f(x), \dots, f^{P_x-1}(x))$ est libre et engendre F_x ,
c'est une base de F_x , et :

$$A = \text{Mat}_B(f|_{F_x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{P_x-1} \end{pmatrix}$$

Alors $\chi_A(X) = (-1)^{P_x} \left(X^{P_x} - \sum_{k=0}^{P_x-1} \alpha_k X^k \right)$ (matrice compagnon)
(voir TD)

On complète B en une base C de E : $\text{Mat}_C(f) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & N \end{pmatrix}$

Donc $\chi_f(X) = \chi_A(X) \chi_N(X) = \chi_N(X) \chi_A(X)$

et $\chi_f(f)(x) = \chi_N(f) \circ \chi_A(f)(x) = 0$

car $\chi_A(f)(x) = (-1)^{P_x} \left(f^{P_x}(x) - \sum_{k=0}^{P_x-1} \alpha_k f^k(x) \right) = 0$

Donc $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\chi_f(f)(x) = 0$

Donc $\chi_f(f) = 0$. $\square$

* coef de plus
haut degré est
= 1

Proposition: • Soient E un K -ev de dim. finie, $f \in \mathcal{L}(E)$,
alors il existe un unique polynôme unitaire
 $\pi_f \in K[X]$ tel que $\{P \in K[X], P(f) = 0\} = \pi_f K[X]$.
• Soient $A \in M_n(K)$, alors il existe un unique
polynôme unitaire
 $\pi_A \in K[X]$ tel que $\{P \in K[X], P(A) = 0\} = \pi_A K[X]$.
On dit que π_f (resp. π_A) est le polynôme minimal de f
(resp. A).

Remarque: • $\pi_f(f) = 0$
• $\pi_A(A) = 0$
• Soit $P \in K[X]$, alors $P(f) = 0 \Leftrightarrow \pi_f \mid P$
 $P(A) = 0 \Leftrightarrow \pi_A \mid P$. divise

Δ : On considère: $I = \{P \in K[X], P(f) = 0\}$
• I est un idéal de $K[X]$.
• $I \neq \{0\}$ puisque $\forall f \in I$ par Cayley-Hamilton.
 $K[X]$ est principal donc I est principal.
Donc il existe π_f tq $I = (\pi_f)$. Quitte à diviser par le
coefficient dominant, ce π_f convient.

□

Théorème: • E un K -ev de dim. finie, $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors f est diagonalisable si π_f est scindé à racines simples.
• $A \in M_n(K)$, alors:
 A est diagonalisable si π_A est scindé à racines simples.

Δ : $\Rightarrow$ Supposons que π_f soit scindé à racines simples.
On sait que $\pi_f(f) = 0$.
Donc π_f est un polynôme annulateur de f , à racines
simples. Donc f est diagonalisable.

$\Rightarrow$ Supposons que f est diagonalisable, alors il existe P scindé à racines simples tq $P(f) = 0$.
 Donc $\pi_f | P$ (car $P(f) = 0$).
 Donc π_f est scindé à racines simples. $\square$

Proposition: Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Soit E un K -ev de dim. finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
 Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible. Alors $P | \chi_f \Leftrightarrow P | \pi_f$.
 P irréductible si P est divisible seulement par αP ou $\alpha \in K \setminus \{0\}$.
 - Sur $\mathbb{C}$, polynôme non-nuls de degré ≤ 1
 - Sur $\mathbb{R}$, polynôme non-nuls de degré ≤ 1 ou 2 avec $\Delta < 0$
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
 Soit $P \in K[X]$ irréductible, alors $P | \chi_A \Leftrightarrow P | \pi_A$.

Remarque: Donc χ_A et π_A (resp. χ_f et π_f) ont les mêmes diviseurs irréductibles.

Δ : $\Rightarrow$ Si $P | \pi_f$ alors $P | \chi_f$ puisque $\pi_f | \chi_f$ par Cayley-Hamilton : $P | \pi_f | \chi_f$.

$\Rightarrow$ Soit $P | \chi_f$ non-constant.

Par d'Alembert-Goursat, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq $P(\lambda) = 0$

donc $\chi_f(\lambda) = 0$ car $P | \chi_f$.

donc $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ donc $\pi_f(\lambda) = 0$

• Si $K = \mathbb{C}$, alors $P = \alpha(x - \lambda) | \pi_f$

• Si $K = \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $P = \alpha(x - \lambda) | \pi_f$.

• Si $K = \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\pi_f(\bar{\lambda}) = P(\bar{\lambda}) = 0$

Donc $P = \alpha(x - \lambda)(x - \bar{\lambda})$ irréductible et $P | \pi_f$. $\square$

Proposition: • E un K -ev de dim. finie, $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\text{Alors } \pi_f^{-1}(0) = \text{Sp}_K(f)$$

$$\bullet A \in \mathcal{M}_n(K), \text{ alors } \pi_A^{-1}(0) = \text{Sp}_K(A).$$

Δ : $\pi_f^{-1}(0) \supset \text{Sp}_K(f)$ car $\pi_f(f) = 0$, montrons l'autre inclusion.

$$\bullet \text{ Soit } \lambda \in \pi_f^{-1}(0)$$

$$\text{alors } \pi_f(x) = (x - \lambda)^m Q(x) \text{ où } Q(\lambda) \neq 0.$$

Supposons par l'absurde que $\lambda \notin \text{Sp}_K(f)$,

$$\text{alors } 0 = \pi_f(f) = \underbrace{(f - \lambda \text{Id})^m}_{\neq 0 \text{ car } \lambda \notin \text{Sp}_K(f)} \circ Q(f)$$

$$\Rightarrow Q(f) = 0 \text{ mais } \deg Q < \deg \pi_f.$$

Contradiction avec la minimalité de π_f . $\square$