Algèbre linéaire et bilinéaire

Chapitre 1 : Rappels d'algèbre linéaire

I - Espaces vectoriels

Définition : Un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne ($+ : E \times E \to E$, $x ; y \to x+y$) et d'une loi de composition externe ($\mathbb{K} \times E \to E$, $\lambda, x \mapsto \lambda x$) tel que :

- $(E, +)$ soit un groupe commutatif.
  - associativité : $\forall x, y, z \in E$, $(x+y)+z = x+(y+z)$
  - commutativité : $\forall x, y \in E$, $x+y = y+x$.
  - $\exists$ d'un neutre : $\exists\, 0 \in E$, $\forall x \in E$, $x+0 = 0+x = x$
  - $\exists$ d'un inverse : $\forall x \in E$, $\exists y \in E$, $x+y = y+x = 0$.

    (on dénote ce "y" par $-x$)
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
- $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$

Exemple :

- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev
- $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev.
- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev
- $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-ev
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-ev pour $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev.
- l'espace des fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Quelques conséquences :

1 - $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \lambda x = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0)$ ou $(x = 0)$

2 - $\forall \lambda \in E, \forall x, y \in E, \ \lambda \cdot (x - y) = \lambda x - \lambda y$

3 - $\forall \lambda, \mu \in E, \forall x \in E, \ (\lambda - \mu) x = \lambda x - \mu x$

Demonstration :

3 - Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, x \in E$,

$(\lambda - \mu) x + \mu x = (\lambda - \mu + \mu) x = \lambda x$.

$\Rightarrow (\lambda - \mu) x = \lambda x - \mu x$.

2 - Soient $\lambda \in \mathbb{K}, x, y \in E$,

$\lambda \cdot (x - y) + \lambda y = \lambda (x - y + y) = \lambda x$.

1 - $\boxed{\Rightarrow}$ Soient $\lambda \in \mathbb{K}, x \in E$ tq $\lambda x = 0$.

Supposons que $\lambda \neq 0$.

$x = 1 \cdot x = (\lambda^{-1} \lambda) x = \lambda^{-1} (\lambda x) = \lambda^{-1} 0 = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x \in E$, $0 \cdot x = (1 - 1) x = 1x - 1x = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot 0 = \lambda (x - x) = \lambda x - \lambda x = 0$.

II - Sous-espaces vectoriels

Definition Soit E un $\mathbb{K}$-ev, On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si

- $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda x \in F$

On vérifie facilement que F est un $\mathbb{K}$-ev.

En pratique :

Proposition Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $F \subset E$.

F sev de E ssi $\begin{cases} 0 \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, x + \lambda y \in F \end{cases}$

ssi $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, x + \lambda y \in F \end{cases}$

Exemples :

- $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ comme $\mathbb{R}$-ev.
1 - $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-ev.
2 - $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-ev.

Démonstration :

1 - $0 \in \mathbb{R}$, Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda z_1 + \mu z_2 \in \mathbb{R}$
2 - $i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}$.

Exemples :

- $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}$-ev car $0 \notin S^1$.

Proposition Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $(F_i)_{i \in I}$ des sev alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev de E.

Démonstration :

- $\forall i \in I$, $0 \in F_i$ donc $0 \in \bigcap_{i \in I} F_i$.
- Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
  Pour tout $i \in I$, $x, y \in F_i$ qui est un sev donc $\lambda x + \mu y \in F_i$. Donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

Proposition Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $A \subset E$. Il existe un plus petit sev de E contenant A, dénoté "Vect(A)".

Exemples

- $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-ev :
  $\mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}$.
  $\mathrm{Vect}(i) = \{iy : y \in \mathbb{R}\} = i\mathbb{R}$

$\mathrm{Vect}(1, i) = \mathbb{C}$

$\mathrm{Vect}(S^1) = \mathbb{C}$

$\mathrm{Vect}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- E un $\mathbb{K}$-ev, $x_1, \dots, x_k \in E$:

$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k : \lambda_i \in \mathbb{K}\}$

Demonstration:

Notons $F = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k : \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.

- F est un sev : • $0 = 0x_1 + \dots + 0x_k \in F$

• Soient $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k, \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors $\alpha(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k$.

$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \alpha \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i$

$= \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \alpha \mu_i) x_i \in F$.

C'est le plus petit : si un sev contient $x_1, \dots, x_k$ alors il contient $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Exemples : E un $\mathbb{K}$-ev, $A \subset E$

$\mathrm{Vect}(A) = \{\sum_{a \in A} \lambda_a a : \lambda_a \in \mathbb{K}$, tous nuls sauf un nombre fini $\}$.

Demonstration de l'existence de Vect (A) :

Rem : il existe au moins un sev de E contenant A : E lui-même.

$\bigcap_{\substack{F \subset E \text{ sev} \\ A \subset F}} F$ est un sev et il est contenu dans tout sev contenant A donc c'est le plus petit.

Definition Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $F_1, \dots, F_k$ des sev. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- Si $x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_k$ où $x_i, y_i \in F_i$, alors pour tout $i = 1, \dots, k$, $x_i = y_i$.
- Si $x_1 + \dots + x_k = 0$ où $x_i \in F_i$, alors $\forall i = 1, \dots, k$, $x_i = 0$.

Dans ce cas, on dit que $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe que l'on note $F_1 + \dots + F_k = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k$.

Demonstration :

- $\boxed{1 \Rightarrow 2}$:

Soient $x_i \in F_i$, $i = 1, \dots, k$ tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0 + 0 + \dots + 0$.
donc $x_i = 0 \ \forall i$.

- $\boxed{2 \Rightarrow 1}$:

Soient $x_i, y_i \in F_i$, tel que $x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_k$.
alors $(x_1 - y_1) + \dots + (x_k - y_k) = 0$

$\Rightarrow \forall i, x_i - y_i = 0$

$\Rightarrow \forall i, x_i = y_i$.

Definition : E un $\mathbb{K}$-ev. F et G deux sev. On dit que F et G sont supplémentaires noté $E = F \oplus G$, si

- $\forall v \in E, \exists x \in F, y \in G, v = x + y$
- F et G sont en somme directe.

(voir TD n°1 pour des caractérisations de $E = F \oplus G$)

III - Bases

Definition : Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteur de E. Une combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$ est un vecteur de la forme :

$v = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont tous nuls sauf un nombre fini.

Exemple : $E = \mathbb{R}[X]$ comme $\mathbb{R}$-ev. Est-ce que les vecteurs suivants sont des CL de $(X^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$?

- $1 + X^6$: Oui
- $\sum_{k=0}^{\infty} X^{2k}$: Non (ce n'est même pas un polynôme de $\mathbb{K}[X]$)
- 0 : Oui

Définition : On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée (ou que les $(x_i)_{i\in I}$ sont linéairement dépendants) si le vecteur nul peut s'écrire comme une combinaison linéaire non triviale des $(x_i)_{i\in I}$:

$$0 = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \text{ , où tous les } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ sauf un nombre fini}$$

et au moins un est non-nul.

Sinon, on dit que la famille est libre, i.e si $0 = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, alors $\forall i$, $\lambda_i = 0$. On dit aussi que les x_i, $i \in I$, sont linéairement indépendants.

Exemple 1 - $E = \mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}$-ev. $v_1 = (1,0)$ $v_2 = (\pi, 0)$.

(v_1, v_2) est une famille liée car $-\pi v_1 + v_2 = 0$.

2 - $E = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,1)$

(v_1, v_2) est une famille libre : Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq.

$(0,0) = \lambda(1,0) + \mu(1,1)$ alors

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}.$$

3 - $E = \mathbb{R}[X]$, la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

Si $0 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k X^k$, où tous les $\lambda_k \in \mathbb{R}$ sont tous nuls sauf un nombre fini, alors $\forall k$, $\lambda_k = 0$. (un polynôme est caractérisé par ses coefficients)

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, on dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire $E = \mathrm{Vect}(x_i, i \in I)$.

Définition : Une base est une famille libre et génératrice.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. La famille $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in I}$ est une base de E ssi tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire de $\mathcal{B}$.

Démonstration : $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Soit $v\in E$, comme $\mathcal{B}$ est génératrice, $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ où les λ_i sont nuls sauf un nombre fini. Soit $v = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$, μ_i nuls sauf un nombre fini. Alors, $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_i e_i \Rightarrow \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0$.
Et donc, pour tout $i\in I$, $\lambda_i - \mu_i = 0$ puisque $\mathcal{B}$ est libre.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que tout vecteur s'écrit de façon unique comme CL de $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{B}$ est génératrice. Par unicité, la seule façon d'écrire 0 comme CL de $\mathcal{B}$ est la combinaison triviale $0 = \sum 0 x_i$

Exemple 1 - $E = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,1)$

(v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$

(v_1, v_2) est libre $\Rightarrow$ voir exemple précédent

(v_1, v_2) est génératrice. En effet, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors.

$(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1)$.

2 - $E = \mathbb{R}[X]$. Est-ce que la famille $(X^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une base ?

Non : pas génératrice, par exemple X^3 ne s'écrit pas comme CL de $(X^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Supposons par l'absurde que $X^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k X^{2k}$, où $\lambda_k\in\mathbb{R}$ tous nuls sauf un nombre fini, en identifiant les coef de degré 3, on trouve $1 = 0$. Contradiction.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice, alors on peut compléter $\mathcal{L}$ avec des vecteurs de $\mathcal{G}$ pour obtenir une base de E. Théorème de la base incomplète

Démonstration : Dans le cas où $\mathcal{G}$ est finie.
On se donne $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie. Soit $A = \{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset \mathcal{G}\setminus\mathcal{L}$ tq $\mathcal{L}\cup\mathcal{F}$ est libre$\}$.
$A\subset\mathbb{N}$, $0\in A$ puisque $\mathcal{L}\cup\emptyset$ est libre, $|\mathcal{G}|$ est un majorant
$A \neq \emptyset$

Donc, A admet un plus grand élément n. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \setminus \mathcal{L}$ tq $|\mathcal{F}| = n$ et $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ est libre. $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ est libre par définition. Montrons que $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ est génératrice. Soit $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{L}$. Supposons que v ne s'écrive pas comme CL de $\mathcal{L} \cup F$. Alors $\mathcal{L} \cup (F \cup \{g\})$ est libre. Alors, $n+1 = |F \cup \{g\}| \in A$, contradiction avec le fait que n est le plus grand élément de A.

Corollaire 1- Toute famille libre se complète en une base.

2- De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

3- Tout EV admet une base.

Démonstration : 1- Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. Alors $\mathcal{G} = E$ est une famille génératrice. D'après le théorème précédent, on peut compléter $\mathcal{L}$ avec des éléments de $\mathcal{G}$ $(= E)$ pour obtenir une base.

2- Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice. On prend $\mathcal{L} = \emptyset$, est une famille libre. On peut compléter $\mathcal{L}$ avec des éléments de $\mathcal{G}$ pour obtenir une base, d'après le théorème précédent. Donc, on a bien construit une base avec seulement des éléments de $\mathcal{G}$.

3- Prenons $\mathcal{L} = \emptyset$, $\mathcal{G} = E$.

Proposition Si $\mathcal{L}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice, alors $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{G}|$.

Δ admis $\square$

Définition Un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors, toutes les bases de E ont le même cardinal. On appelle ce cardinal "dimension de E" et on le note $\dim_{\mathbb{K}} E$.

Démonstration : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases. Alors :
- $\mathcal{B}$ est libre, $\mathcal{B}'$ est génératrice, donc $|\mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{B}'|$.
- De la même façon, $|\mathcal{B}'| \leqslant |\mathcal{B}|$

Donc, $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Exemple : • $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$: une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-ev est (1) car tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $z = z \times 1$.
• $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$: une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-ev est $(1, i)$ puisque tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $z = x \times 1 + y \times i$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soient $\mathcal{L}$ une famille libre de E, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $|\mathcal{L}| \leqslant \dim_{\mathbb{K}} E \leqslant |\mathcal{G}|$.

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ une base de E alors $\mathcal{B}$ est génératrice donc $|\mathcal{L}| \leqslant |\mathcal{B}| = \dim_{\mathbb{K}} E$. $\mathcal{B}$ est aussi une famille libre, donc $\dim_{\mathbb{K}} E = |\mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{G}|$.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E, alors 2 des propriétés suivantes entraînent la troisième :
1- $\mathcal{F}$ est libre
2- $\mathcal{F}$ est génératrice.
3- $|\mathcal{F}| = \dim_{\mathbb{K}} E$.

V - Applications linéaires

Définition : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev. On dit que $f : E \to F$ est $\mathbb{K}$-linéaire si : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Ou de façon équivalente : $\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x) \\ \forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$

Notation : On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \to F$, c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour :

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in E$.
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in E$.

On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'espace des endomorphismes.
On note $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ l'espace dual de E. On dit que $f \in E^*$ est une forme linéaire.

Conséquence Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $f(0) = 0$.

__Démonstration :__
$f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$.

Proposition La composition de deux applications linéaires est linéaire.

Définition Un isomorphisme linéaire est une application linéaire $f : E \to F$ bijective telle que $f^{-1} : F \to E$ est linéaire.

Proposition Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(E,F)$

__Démonstration :__
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $y_1, y_2 \in F$. Puisque f est bijective, $\exists!\, x_i \in E$, $y_i = f(x_i)$, $i = 1,2$.

$$f^{-1}(\lambda y_1 + y_2) = f^{-1}(\lambda f(x_1) + f(x_2)) = f^{-1}(f(\lambda x_1 + x_2))$$
$$= \lambda x_1 + x_2 = \lambda f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2).$$

Proposition Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

- Si $G \subset E$ est un sev de E, alors $f(G)$ est un sev de F.
- Si $H \subset F$ est un sev de F, alors $f^{-1}(H)$ est un sev de E.

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $\ker f := f^{-1}(0)$. C'est un sev de E nommé le noyau de f.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.

Démonstration :

$\Rightarrow$) Supposons que f est injective. Soit $x \in \ker f$, alors $f(x) = 0 = f(0)$. Donc, puisque f est injective, $x = 0$. Donc, $\ker f \subset \{0\}$, mais $0 \in \ker f$ car il s'agit d'un sev. Ainsi, $\ker f = \{0\}$.

$\Leftarrow$) Supposons $\ker f = \{0\}$. Soient $x, y \in E$ tq $f(x) = f(y)$. Alors, $0 = f(x) - f(y) = f(x-y)$. Donc $(x-y) \in \ker f = \{0\}$, et ainsi $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$.

Théorème du rang : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, tels que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\operatorname{Im} f$ est un sev de dimension finie et

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Démonstration : Soit $(u_i)_{i \in I}$ une base de $\ker f$. ($\# I < \infty$)

Soit $(v_j)_{j \in J}$ une base de $\operatorname{Im} f$. $\forall j \in J, \exists w_j \in E, v_j = f(w_j)$.

On va montrer que $(u_i, w_j)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ est une base de E alors, on aura : $|I| + |J| = \dim_{\mathbb{K}} E$ ($|J| < \infty$ en particulier)

Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$. donc $f(x) = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j$ où $\lambda_j \in \mathbb{K}$ sont tous nuls sauf un nombre fini.

$f(x) = \sum_{j \in J} \lambda_j f(w_j)$.

Ainsi, $f(x - \sum_{j \in J} \lambda_j w_j) = 0$.

Donc, $x - \sum_{j \in J} \lambda_j w_j \in \ker f$.

Finalement, $x - \sum_{j \in J} \lambda_j w_j = \sum_{i \in I} \mu_i u_i$, $\mu_i \in \mathbb{K}$

donc $x = \sum_{i \in I} \mu_i u_i + \sum_{j \in J} \lambda_j w_j$.

On a montré que $(u_i, w_j)_{i\in I, j\in J}$ est génératrice.

Montrons que c'est une famille libre.

Soient $\mu_i \in \mathbb{K}$, $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tous nuls sauf un nombre fini tq

$0 = \sum_{i\in I} \mu_i u_i + \sum_{j\in J} \lambda_j w_j \quad (*)$

$\Rightarrow \underbrace{f(0)}_{=0} = \sum_{i\in I} \mu_i \underbrace{f(u_i)}_{=0} + \sum \lambda_j \underbrace{f(w_j)}_{=v_j}$

Donc $\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, \lambda_j = 0$ car (v_j) est libre (comme base de $\mathrm{Im}\, f$).

Ainsi, $(*)$ donne $0 = \sum_{i\in I} \mu_i u_i \Rightarrow \mu_i = 0$ car (u_i) est libre (comme base de $\mathrm{Ker}\, f$).

Conclusion : $(u_i, w_j)_{i\in I, j\in J}$ est une base de E, donc $\dim \mathrm{Im}\, f = |J| \leq \dim E$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = |I| + |J| = \dim E$.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ 1- E de dimension finie, alors.

f injective $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = \dim E$

2- Si on suppose F de dimension finie alors

f surjective $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = \dim F$

3- Si E et F de dimension finie et $\dim E = \dim F$. Alors.

f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Rightarrow f$ bijective.

Démonstration :

1- D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$.

Donc, f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f = 0$.

$\Leftrightarrow \dim E = \dim \mathrm{Im}\, f$.

2- f surjective $\Rightarrow \mathrm{Im}\, f = F \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = \dim F$

Supposons que $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim F$. Or $\mathrm{Im}\, f$ est un sev de F qui est de dimension finie, donc $\mathrm{Im}\, f = F$.

3- D'après le théorème du rang, on a :

$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$.

f injective $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = \dim E = \dim F \Leftrightarrow f$ surjective

VI - Représentation matricielle

Définition Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Une matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ avec n lignes et p colonnes.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$$

De façon équivalente, c'est une famille : $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ où $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Proposition $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\dim_{\mathbb{K}} M_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$. pour les lois $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
et $\lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

Démonstration :

C'est clairement un $\mathbb{K}$-ev. Pour $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, p$, posons $E_{ij} = (a_{kl})_{\substack{k=1,\dots,n \\ l=1,\dots,p}}$ où $a_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(matrice avec des zéros partout sauf un 1 en (i,j))

Puis toute matrice $M \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}.$$

Donc, $(E_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$ est une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Donc, $\dim_{\mathbb{K}} M_{n,p}(\mathbb{K}) = |(E_{ij})| = n \times p$.

Définition Soient $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$. $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$

On définit $AB \in M_{nq}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,q}}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

⚠ $M_{m,p} \times M_{p,q} \to M_{m,q}$

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, alors le choix d'une base $B = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ pour E permet d'identifier

E avec $M_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$M_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow E$$
$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

C'est un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$, on note $[x]_B = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ ou $\mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$.

Remarque : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.

Soit $B = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Si on connait les valeurs de $f(e_i)$, $i \in I$, alors on connait f. En effet, soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont tous nuls sauf un nombre fini, puis, par linéarité : $f(x) = f(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i)$

Supposons maintenant que $\dim_{\mathbb{K}} E = p$ et $\dim_{\mathbb{K}} F = n$. Alors,

$$M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$$
$$(m_{ij}) \longmapsto f(e_j) = \sum m_{ij} f_i$$

où $B = (e_i)_{1,\dots,p}$ est une base de E et $C = (f_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base de F. C'est un isomorphisme. Donc :

1- Pour B et C fixés, on peut identifier $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec une matrice : $\mathrm{Mat}_{B,C}(f) = \left([f(e_1)]_C, [f(e_2)]_C, \dots, [f(e_p)]_C\right) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

2- $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E,F) = \dim_{\mathbb{K}} M_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Proposition
- $\mathrm{Mat}_C(f(x)) = \mathrm{Mat}_{B,C}\, f \cdot \mathrm{Mat}_B\, x$.
- $\mathrm{Mat}_{B,D}(f\circ g) = \mathrm{Mat}_{C,D} f \times \mathrm{Mat}_{B,C}\, g$ où $g \in \mathcal{L}(E,F)$, $f \in \mathcal{L}(F,G)$, B est une de E, C une base de F et D une base de G.

Définition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Le noyau de A est :

$$\mathrm{Ker}\, A = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{K}) : AX = 0\}.$$

L'image de A est :

$$\mathrm{Im}\, A = \{AX : X \in M_{p,1}(\mathbb{K})\} \subset M_{n,1}(\mathbb{K})$$

Algèbre linéaire et bilinéaire

Proposition Si on note $c_1, \ldots, c_p$ les colonnes de A, alors $\mathrm{Im}(A)$ est le sev de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par $(c_1, \ldots, c_p)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(c_1, \ldots, c_p)$$

Démonstration :

On définit $E_i \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ par $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← i-ème ligne. Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$, alors $X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i E_i$.

$$AX = A\sum_{i=1}^{p} \lambda_i E_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A E_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_i$$

Proposition $\mathrm{Ker}(A)$ est un sev de $M_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a les identifications :

$E \supset \mathrm{Ker}\, f \longleftrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{Mat}_{B,C}(f)) \subset M_{p,1}(\mathbb{K})$

$F \supset \mathrm{Im}\, f \longleftrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Mat}_{B,C}(f)) \subset M_{n,1}(\mathbb{K})$

Corollaire $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. $p = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, A + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, A$. $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, A$ est le rang de A. (version matricielle du théorème du rang)

Définition On dit que $M \in M_n(\mathbb{K})$ (matrice carrée de taille n) est inversible s'il existe $N \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $MN = NM = I_n$. On note $M^{-1} = N$. (N est unique).

Proposition Soient $M, N \in M_n(\mathbb{K})$. $MN = I_n \Rightarrow NM = I_n$.

Remarque : il n'existe pas d'analogue en dimension infinie.

Notation : On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$. GL = "Groupe linéaire (multiplicatif avec le neutre I_n)".

Proposition Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. $M \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det M \neq 0$

$\Leftrightarrow$ M est la matrice d'un automorphisme

$\Leftrightarrow$ rang $M = n$.

$\Leftrightarrow \dim \ker M = 0$.

$\Leftrightarrow \ker M = \{0\}$.

$\Leftrightarrow$ les colonnes sont linéairement indépendantes

$\Leftrightarrow {}^tM \in GL_n(\mathbb{K})$

$\Leftrightarrow$ les lignes de M sont linéairement indépendantes

VII - Changement de bases

Définition Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n = \dim_{\mathbb{K}} E$. Soient B, C deux bases. La matrice de passage de B à C est :

$$P_{B,C} = Mat_{C,B}(id)$$

Remarque : $P_{B,C} = \left([e_1]_B, [e_2]_B, \dots [e_n]_B \right)$ où $C = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

Proposition
- $P_{B,D} = P_{B,C} \times P_{C,D}$
- $P_{B,B} = I_n$.
- $P_{B,C} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P^{-1}_{B,C} = P_{C,B}$.
- $Mat_B(x) = P_{B,C} \, Mat_C(x)$
- $Mat_{B',C'}(f) = P^{-1}_{C,C'} \, Mat_{B,C}(f) \, P_{B,B'}$

Démonstration :

1 - $P_{B,D} = Mat_{D,B}(id) = Mat_{C,B}(id) \, Mat_{D,C}(id)$

$= P_{B,C} \times P_{C,D}$.

2 - Si $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. $e_1 = 1e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n$, $e_2 = 0e_1 + 1e_2 + \dots + 0e_n$, $e_n = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 1e_n$. $\Rightarrow P_{B,B} = I_n$.

3 - $P_{B,C} \times P_{C,B} = P_{B,B} = I_n$. Donc $P_{B,C} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P_{B,C}^{-1} = P_{C,B}$.

4 - $P_{B,C} \times Mat_C(x) = Mat_{C,B}(id) \times Mat_C(x) = Mat_B(x)$