Université d'Angers – 2021/2022

Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle continu

du 10 novembre 2021.

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
Vous devez justifier toutes vos réponses. La note tiendra compte de la qualité et de la concision de la rédaction.
Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours et des TDs. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1.

1. Donner l'énoncé précis du théorème du rang.
2. Existe-t-il une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = 3X^2 - 3X - 6$?
3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
   (a) Que signifie que f est diagonalisable ?
   (b) Donner 4 conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit diagonalisable (sans faire intervenir de matrice).

Exercice 2.

On dénote par $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables.
On considère l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$ défini par $\varphi(f) = f'$.

1. Quel est le noyau de φ ? Est-ce que φ est injectif ?
2. Quelle est l'image de φ ? Est-ce que φ est surjectif ?
3. Est-ce que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est de dimension finie ?
4. Déterminer les valeurs propres de φ et les sous-espaces propres associés.

Exercice 3.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que
$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Exercice 4.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ où $m \in \mathbb{R}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de m, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution de l'exercice 1.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$.
   Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
   Si E est de dimension finie alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie aussi et
   $$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

2. Non car le coefficient dominant du polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est $(-1)^n$.

3. (a) On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
   (b) f est diagonalisable
   $\Leftrightarrow$ E admet une base formée de vecteurs propres de f
   $\Leftrightarrow$ $E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \mathrm{SEP}(f, \lambda)$
   $\Leftrightarrow$ $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \dim \mathrm{SEP}(f, \lambda)$
   $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{Le polynôme caractéristique } \chi_f \text{ de } f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f),\ \dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \mathrm{mult}_\lambda(\chi_f) \end{cases}$
   $\Leftrightarrow$ Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$
   $\Leftrightarrow$ Le polynôme minimal de f est scindé à racines simples

Solution de l'exercice 2.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors
   $$f \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(f) = 0 \Leftrightarrow f' = 0 \Leftrightarrow f \text{ est constante.}$$
   Donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est le sous-espace vectoriel des fonctions constantes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   L'endomorphisme φ n'est pas injectif puisque le noyau de φ contient des fonctions non-nulles.

2. Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   Puisque g est continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse, il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f' = g$.
   Puisque $f' = g$ est indéfiniment dérivable, on en déduit que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   On a donc montré que $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \exists f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi(f) = g$.
   Donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et φ est surjectif.

3. *Méthode 1.*
   On considère la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$ d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On a vu en TD que $\mathcal{F}$ était libre.
   Donc $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie puisqu'il admet une famille libre infinie.

   Méthode 2.
   Supposons par l'absurde que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ soit de dimension finie.
   Puisque φ est un endomorphisme surjectif d'un espace vectoriel de dimension finie alors φ est aussi injectif. D'où une contradiction.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors
   $$\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ : \ f' = \lambda f \right\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x}).$$
   Donc tout $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de φ et $\mathrm{SEP}(\varphi, \lambda) = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$.

Solution de l'exercice 3.
$\Rightarrow$ Supposons que $g \circ f = 0$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Puis $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$.
Donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$.
Ainsi $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$, donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0$.
On a montré que $\forall x \in E,\ g \circ f(x) = 0$, i.e. que $g \circ f = 0$.

Solution de l'exercice 4.
Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-m & m-2 & m-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ m-2 & m-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(2-X)(m-X)\end{aligned}$$

Donc χ_A est scindé et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2, m\}$.
On distingue alors trois cas.

- Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$ alors $\chi_A(X)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
- Si $m = 1$ alors 1 est une racine double de χ_A.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, alors
  $$X \in \mathrm{SEP}(A, 1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ -x + y + z &=& 0 \\ x - y &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& y \\ z &=& 0 \end{array} \right.$$
  Donc $\mathrm{SEP}(A, 1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
  Ainsi $\dim \mathrm{SEP}(A, 1) = 1 \neq 2 = \mathrm{mult}_1(\chi_A)$. Donc A n'est pas diagonalisable.
- Si $m = 2$ alors 2 est une racine double de χ_A.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, alors
  $$X \in \mathrm{SEP}(A, 2) \Leftrightarrow x = z$$
  Donc $\mathrm{SEP}(A, 2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
  Ainsi $\dim \mathrm{SEP}(A, 2) = 2 = \mathrm{mult}_2(\chi_A)$.
  De plus $1 \leq \dim \mathrm{SEP}(A, 1) \leq \mathrm{mult}_1(\chi_A) = 1$, donc $\dim \mathrm{SEP}(A, 1) = \mathrm{mult}_1(\chi_A) = 1$.
  Donc A est diagonalisable.

En conclusion, A est diagonalisable si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.