

Étude locale de fonctions

Exercice 1.

Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x)$
2. $f_2(x) = 1 - \cos(x)$
3. $f_3(x) = \ln(1 + x^2)$
4. $f_4(x) = \tan(3x)$
5. $f_5(x) = \arctan(2x)$

Exercice 2.

1. (a) Donner un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$(i) f_1(x) = 3x^4 - 2x^2 + \sqrt{x} \quad (ii) f_2(x) = \frac{x^2 - 2 \sin(x)}{2x^3 - x + 7} \quad (iii) f_3(x) = \frac{1 - x \ln(x)}{(x + 6)\sqrt{x^2 + \sin(x)}}$$

$$(iv) f_4(x) = \sqrt{x^6 - 5x^3 + 1} \quad (v) f_5(x) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

- (b) En déduire la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes.

$$(i) \frac{f_5}{f_2} \quad (ii) \frac{f_1 f_2^6}{f_4^2} \quad (iii) f_1 - f_4 \quad (iv) f_3 + f_5 \quad (v) f_2 - f_5$$

- (c) Peut-on en déduire un équivalent de $4f_2 - f_5$?

2. Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes, puis en déduire leur limite en 0.

$$(a) f_1(x) = 3x^4 - 2x^2 + \sqrt{x} \quad (b) f_2(x) = \frac{(e^x + 1) \sin(x)}{\ln(1 + x)}$$

$$(c) f_3(x) = x^2 - \arctan(x) \quad (d) f_4(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x(1 - \cos(x))}$$

Exercice 3.

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux en justifiant.

1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ alors } e^{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} e^{g(x)}.$$

2. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ alors } \ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x)).$$

Exercice 4.

Soit f une fonction réelle admettant un développement limité d'ordre n en 0.

1. Montrer que si f est paire alors la partie régulière du développement limité de f en 0 ne contient que des puissances paires.
2. Montrer que si f est impaire alors la partie régulière du développement limité de f en 0 ne contient que des puissances impaires.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Donner le développement limité de f en a à l'ordre n pour :

1. $a = 0, n = 1$.
2. $a = 0, n = 2$.
3. $a = 0, n = 3$.
4. $a = 2, n = 3$.

Exercice 6.

1. Donner le développement limité de $f(x) = \ln(1+x) - \sin(x)$ en 0 à l'ordre 3.
2. Donner le développement limité de $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en 0 à l'ordre $2n$.
3. Donner le développement limité de $f(x) = \cos(3x) \sin(2x)$ en 0 à l'ordre 5.
4. (a) Donner le développement limité de $f(x) = e^x \cos(x)$ en 0 à l'ordre 3.
(b) En déduire un équivalent simple en 0 de $g(x) = e^x \cos(x) - 1 - x$.
5. Donner le développement limité de $f(x) = \sqrt{2+x}$ en 0 à l'ordre 3.
6. Donner le développement limité de $f(x) = \frac{1}{2+x}$ en 0 à l'ordre 3.
7. Donner le développement limité de $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ en 0 à l'ordre 3.
8. (a) Donner le développement limité de $f(x) = e^{\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 3.
(b) En déduire un équivalent simple en 0 de $g(x) = e^{\cos(x)} - e$.
9. Donner le développement limité de $f(x) = \frac{x^5 \sin(x)}{\ln(1+x)}$ en 0 à l'ordre 5.
10. Donner le développement limité de $f(x) = \sin(1+x)$ en 0 à l'ordre 3.

Pour les questions précédentes, chaque fois que c'est possible, en déduire le signe de la fonction et l'allure de sa courbe représentative au voisinage de 0 (position par rapport à sa tangente).

Exercice 7.

Étudier la limite éventuelle de f en a pour :

1. $f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2}$ et $a = 0$.
2. $f(x) = \frac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ et $a = 1$.

Exercice 8.

Calculer les limites suivantes en utilisant des développements limités convenablement choisis :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\frac{x}{x+1}}}{x^2}$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\right)^x$ où $a, b, c > 0$.

Exercice 9.

En utilisant des développements limités, calculer un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \ln(2^x + 3^x - 5^x)$
2. $f_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\arcsin x)^2}$

Exercice 10.

Étudier l'allure de la courbe représentative de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ au voisinage de a pour :

1. $a = 0$.
2. $a = 1$.

Exercice 11.

Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions suivantes au voisinage de l'origine :

$$f(x) = x\sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan(x).$$

Exercice 12.

1. On considère $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.
 - (a) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote commune en $-\infty$ et $+\infty$.
 - (b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote ?
2. On considère $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.
 - (a) Montrer que la courbe représentative de g admet des asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - (b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de g par rapport à ces asymptotes ?
3. On considère $h(x) = (x+2)e^{1/x}$.
 - (a) Montrer que la courbe représentative de h admet une asymptote en $+\infty$.
 - (b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de h par rapport à cette asymptote ?

Exercice 13.

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer le développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 6.

Exercice 14.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{2}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 dont la partie régulière est nulle.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. Montrer que f' n'admet pas de développement limité en 0.
4. Que peut-on en conclure ?

Courbes paramétrées

Exercice 15.

Déterminer le domaine d'étude le plus petit possible pour les courbes paramétrées suivantes :

$$1. \begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{2} \sin(t) \\ y(t) = 1 - \frac{2}{3} \cos(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad 2. \begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^4} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Pour 2., on pourra considérer la transformation $t \mapsto \frac{1}{t}$.

Exercice 16.

Déterminer les points multiples de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 17.

Trouver les points où la tangente à la courbe suivante est horizontale ou verticale :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}, t \in [-\pi, \pi].$$

Exercice 18.

Déterminer le type de point stationnaire en $t_0 = 0$ pour les courbes paramétrées suivantes :

(point d'allure ordinaire, point d'inflexion, point de rebroussement de première espèce, point de rebroussement de deuxième espèce)

$$1. \begin{cases} x(t) = t^5 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = t^2 - t^3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{2}t^3 + 2t^4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x(t) = t^2 \ln(1+t) \\ y(t) = t^2 (e^{t^2} - 1) \end{cases}$$

Exercice 19.

Étudier les asymptotes de la courbe paramétrée suivante, puis déterminer la position relative de la courbe

par rapport à ces asymptotes : $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t-1} \\ y(t) = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Exercice 20.

Étudier puis tracer les courbes paramétrées suivantes :

$$1. \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (astroïde)}.$$

$$2. \begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (cycloïde)}.$$

$$3. \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (une courbe de Lissajous)}.$$

$$4. \begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (lemniscate de Bernoulli; on pourra considérer l'exercice 15)}.$$

Développements limités usuels en 0

- $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-(n-1))}{n!}x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$
- $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$
- $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+1)} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$