Licence de mathématiques et informatique

Introduction à l'analyse

Partiel 2 - 1er décembre 2017

Les calculatrices et les documents sont interdits.Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

1. Résoudre l'équation réelle
$$\ln(x-2)+\ln(x-3)=\ln(6).$$
2. On considère l'équation réelle
$$(E) \quad x^x = (\sqrt{x})^{x+1}.$$
   (a) Pour tout $a \in]0,+\infty[$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$, exprimer a^b à l'aide de l'exponentielle et du logarithme népérien.

   (b) En utilisant la question précédente, résoudre l'équation (E).

Exercice 2

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{-\ln(x)}. \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \exp(-(\ln(x))^2)$.
2. Déterminer
$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x).$$
3. Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.
4. Dresser le tableau des variations de f.
5. Déterminer, en utilisant les théorèmes du cours, les ensembles $f(]0,1[)$ et $f([1,+\infty[)$, puis en déduire l'ensemble $f(]0,+\infty[)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(\sqrt{1+x^2}-x). \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble de dérivation de f. On notera E cet ensemble.
3. Démontrer que pour tout $x \in E$,
$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$
4. Déduire de la question précédente une autre expression de f.

Exercice 4

1. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{array}$$

   Donner les primitives de l'application f sur $]-1,1[$.
2. Calculer les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^9(x)\cos(x)\ dx, \quad \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\ dx.$$

Exercice 5

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_1^e x^2 \ln(x)^n\ dx.$$

1. En faisant une intégration par parties, calculer I_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$