Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licences de mathématiques et informatique
2017-2018

Introduction à l'analyse

Partiel 1 – 20 octobre 2017

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

On considère l'assertion (P)

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R} : (a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Rightarrow a + b + ab \neq -1.$$

1. Écrire la négation de (P).
2. Écrire la contraposée de (P).
3. Montrer que (P) est vraie.

(On pourrait utiliser sa contraposée et remplacer $a + b + ab + 1$ par une forme factorisée.)

Exercice 2

Soit $n > 1$ un entier naturel ; on considère la formule :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

1. Réécrire cette formule en utilisant le signe $\sum$ et sans points de suspension.
2. Démontrer cette formule par récurrence sur n.

Exercice 3

Soit $f : A \to B$ une application et soit $U \subset B$.

1. Rappeler la définition de l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de U.
2. Donner $f^{-1}(U)$ dans le cas $f = \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ et $U =]\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 4

1. Donner la définition de l'injectivité d'une application.

Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ des applications.

2. Montrer que

$$f, g \text{ injectives} \Rightarrow g \circ f \text{ injective}.$$

3. Montrer que

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective}.$$

4. Donner un exemple d'applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ telles que $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas.

Exercice 5

Soient

$$A = \{x \in \mathbb{R},\ |2x| \leqslant x + 3\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R},\ |x^2 - 5x| < 6\}.$$

Exprimer les ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$ comme réunions d'intervalles.

Aix*Marseille université

Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

NOM : MALCOLM

PRENOM : IAN

DATE DE NAISSANCE : 14 / 03 / 1954

Date de l'épreuve : 20/10/2017

Note

20 / 20

Année d'études et mention : L1 MI - Groupe 3

Epreuve de : Introduction à l'analyse

E($\sqrt{2}$) Nbre d'intercalaires

④

Exercice 1

1) On sait que $A \Rightarrow B$ est logiquement équivalent à $(\neg A) \vee B$, donc, d'après les lois de Morgan, la négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge (\neg B)$.

1

Ainsi la négation de (P) est

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\quad a \neq -1 \text{ et } b \neq -1 \text{ et } a+b+ab = -1$$

2) La contraposée de (P) est

1

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\quad a+b+ab=-1 \Rightarrow (a=-1 \text{ ou } b=-1)$$

3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a+b+ab=-1$.

Alors $0 = a+b+ab+1 = (a+1)(b+1)$

2

d'où $a+1=0$ ou $b+1=0$

ie $a=-1$ ou $b=-1$

Ainsi la contraposée de (P) est vraie et donc (P) est vraie

3

0,5

Exercice 2

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(n-1)n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}$

2) Montrons par récurrence que

$P(n)$: " $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1-\frac{1}{n}$ "

Si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1 \Leftrightarrow n \geq 2$

est vraie $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2,5

Initialisation au rang $n=2$:

$\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

$1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc $P(2)$ est vraie

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$!

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{1-(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{n}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

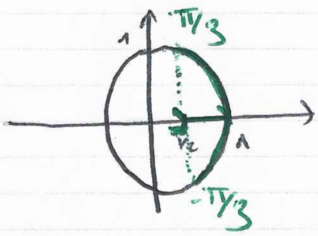
Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{n}$

3,5

Exercice 3

1 1. $f^{-1}(U) = \{x \in A,\ f(x) \in U\}$

2.



$$\cos^{-1}(]\tfrac{1}{2}, 1]) = \{x + 2k\pi,\ x \in]-\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}[,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

2,5

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{x + 2k\pi,\ x \in]-\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}[\}$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi[$$

5,5

Exercice 4

1 1. Une application $f : A \to B$ est injective si
$\forall x, y \in A, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

2. Supposons f, g injectives.
Soient $x, y \in A$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$
alors $g(f(x)) = g(f(y))$
1,5 donc $f(x) = f(y)$ puisque g est injective
puis $x = y$ puisque f est injective
On a donc montré que :
$\forall x, y \in A,\ g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$
Ainsi $g \circ f$ est injective

3) Supposons $g \circ f$ injective.

Soient $x, y \in A$ tels que $f(x) = f(y)$

alors $g(f(x)) = g(f(y))$

1,5 ie $g\circ f(x) = g \circ f(y)$

donc $x = y$ puisque $g\circ f$ est injective

On a donc montré que

$$\forall x,y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Donc f est injective

4) Ex1 :

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$, $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

1,5 alors $g\circ f(x) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x}^2 = x$

donc $g\circ f$ est injective mais g ne l'est pas

puisque $g(-1) = 1 = g(1)$

Ex2 :

Soient $f : \begin{array}{l} \{a,b\} \longrightarrow \{1,2,3\} \\ a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \{1,2,3\} \longrightarrow \{\alpha, \beta\} \\ 1 \longmapsto \alpha \\ 2 \longmapsto \beta \\ 3 \longmapsto \beta \end{array}$

alors $g\circ f : \begin{array}{l} \{a,b\} \longrightarrow \{\alpha,\beta\} \\ a \longmapsto \alpha \\ b \longmapsto \beta \end{array}$

Ainsi $g\circ f$ est injective alors que g ne l'est pas

Exercice 5 4

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in A \Leftrightarrow |2x| \leqslant x+3$

$\Leftrightarrow -x-3 \leqslant 2x \leqslant x+3$

$\Leftrightarrow -x-3 \leqslant 2x$ et $2x \leqslant x+3$

1 $\Leftrightarrow -3 \leqslant 3x$ et $x \leqslant 3$

$\Leftrightarrow x \geqslant -1$ et $x \leqslant 3$

$\Leftrightarrow x \in [-1, 3]$

Donc $A = [-1,3]$

$x \in B \Leftrightarrow |x^2 - 5x| < 6$

$\Leftrightarrow -6 < x^2 - 5x < 6$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 5x + 6 > 0}_{(a)}$ et $\underbrace{x^2 - 5x - 6 < 0}_{(b)}$

Etude de (a) :

$\Delta = 25 - 24 = 1$

donc les racines sont $\frac{5 \pm 1}{2}$ ie 2 et 3

2 puisque le coefficient dominant est positif,

$(a) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$

Etude de (b) :

$\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$

donc les racines sont $\frac{5 \pm 7}{2}$ ie -1 et 6

puisque le coefficient dominant est positif,

$(b) \Leftrightarrow x\ ]-1, 6[$

Donc $x \in B \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$ et $x \in]-1, 6[$

$\Leftrightarrow x \in (]-\infty, 2[\cup]3 + \infty[) \cap]-1, 6[=]-1, 2[\cup]3, 6[$

Donc $B =]-1, 2[\cup]3, 6[$

0,5 $A \cup B = [-1,3] \cup (]-1,2[\cup]3,6[)$

$= [-1,6[$

$A \cap B = [-1,3] \cap (]-1,2[\cup]3,6[)$

0,5 $= ([-1,3] \cap]-1,2[) \cup ([-1,3] \cap]3,6[)$

$=]-1,2[\cup \phi$

$=]-1,2[$