

SOLUTIONS DE CLASSE C^m D'ÉQUATIONS SEMI-ALGÈBRIQUES

Travail en collaboration avec E. BIERSTONE et P.D. MILMAN

Jean-Baptiste Campesato



20 janvier 2023

Motivations – Prolongement de Whitney

Problème du prolongement de Whitney

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sous quelles conditions f admet-elle un prolongement de classe C^m ?

(i.e. existence de $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^m telle que $F|_X = f$)

Motivations – Prolongement de Whitney

Problème du prolongement de Whitney

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sous quelles conditions f admet-elle un prolongement de classe C^m ?

(i.e. existence de $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^m telle que $F|_X = f$)

- Whitney, 1934 : Théorème du prolongement de Whitney.
- Whitney, 1934 : CNS lorsque $n = 1$.
- Glaeser, 1958 : CNS lorsque $m = 1$.
- Bierstone–Milman–Pawłucki, 2003 : généralisation du fibré paratangent lorsque $m \geq 2$.
- Fefferman, 2006 : CNS pour que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ admette un prolongement de classe C^m .

Motivations – Problème de Brenner–Fefferman–Hochster–Kollár

Problème de Brenner–Fefferman–Hochster–Kollár

Sous quelles conditions est-ce qu'une équation $\varphi = \sum \varphi_i f_i$ admet une solution de classe $\mathcal{C}^m$?

Motivations – Problème de Brenner–Fefferman–Hochster–Kollár

Problème de Brenner–Fefferman–Hochster–Kollár

Sous quelles conditions est-ce qu'une équation $\varphi = \sum \varphi_i f_i$ admet une solution de classe C^m ?

Origine du problème : étant donnés $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Quelles fonctions continues $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrivent $\varphi = \sum \varphi_i f_i$ où $\varphi_i \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$?

Motivations – Problème de Brenner–Fefferman–Hochster–Kollár

Problème de Brenner–Fefferman–Hochster–Kollár

Sous quelles conditions est-ce qu'une équation $\varphi = \sum \varphi_i f_i$ admet une solution de classe C^m ?

Origine du problème : étant donnés $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Quelles fonctions continues $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrivent $\varphi = \sum \varphi_i f_i$ où $\varphi_i \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$?

Fefferman–Luli, 2014

CNS sur φ et les f_i pour l'existence de solutions φ_i de classe C^m .

Semi-algèbricité – Définitions

Définition : ensemble semi-algébrique

Les sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$ sont les parties de l'algèbre booléenne engendrée par les

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$$

où $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Semi-algèbricité – Définitions

Définition : ensemble semi-algébrique

Les sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$ sont les parties de l'algèbre booléenne engendrée par les

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$$

où $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Exemples

Soit $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, les ensembles suivants sont semi-algébriques :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$$

Semi-algèbricité – Définitions

Définition : ensemble semi-algébrique

Les sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$ sont les parties de l'algèbre booléenne engendrée par les

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$$

où $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Exemples

Soit $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, les ensembles suivants sont semi-algébriques :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$$

Définition : fonction semi-algébrique

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ est semi-algébrique si son graphe $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+p}$ l'est.

Semi-algèbricité – Théorème de Tarski–Seidenberg

Théorème de Tarski–Seidenberg : stabilité par projection

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique alors $\pi(S)$ l'est aussi, où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Semi-algèbricité – Théorème de Tarski–Seidenberg

Théorème de Tarski–Seidenberg : stabilité par projection

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique alors $\pi(S)$ l'est aussi, où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Corollaire 1

Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ est semi-algébrique alors X et $\text{Im}(f)$ sont semi-algébriques.

Semi-algèbricité – Théorème de Tarski–Seidenberg

Théorème de Tarski–Seidenberg : stabilité par projection

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique alors $\pi(S)$ l'est aussi, où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Corollaire 1

Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ est semi-algébrique alors X et $\text{Im}(f)$ sont semi-algébriques.

Corollaire 2 : élimination des quantificateurs

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique, alors les ensembles suivants le sont aussi

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\}$$

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\}$$

Semi-algèbricité – Théorème de Tarski–Seidenberg

Théorème de Tarski–Seidenberg : stabilité par projection

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique alors $\pi(S)$ l'est aussi, où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Corollaire 1

Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ est semi-algébrique alors X et $\text{Im}(f)$ sont semi-algébriques.

Corollaire 2 : élimination des quantificateurs

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique, alors les ensembles suivants le sont aussi

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\} = \pi(S)$$

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\}$$

Semi-algèbricité – Théorème de Tarski–Seidenberg

Théorème de Tarski–Seidenberg : stabilité par projection

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique alors $\pi(S)$ l'est aussi, où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Corollaire 1

Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ est semi-algébrique alors X et $\text{Im}(f)$ sont semi-algébriques.

Corollaire 2 : élimination des quantificateurs

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique, alors les ensembles suivants le sont aussi

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\} = \pi(S)$$

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\} = \mathbb{R}^n \setminus \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus S)$$

Semi-algèbricité – Théorème de Tarski–Seidenberg

Théorème de Tarski–Seidenberg : stabilité par projection

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique alors $\pi(S)$ l'est aussi, où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Corollaire 1

Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ est semi-algébrique alors X et $\text{Im}(f)$ sont semi-algébriques.

Corollaire 2 : élimination des quantificateurs

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique, alors les ensembles suivants le sont aussi

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\} = \pi(S)$$

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\} = \mathbb{R}^n \setminus \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus S)$$

Exemple

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est semi-algébrique alors $\overline{A}$ l'est aussi.

Semi-algèbricité – Théorème de Tarski–Seidenberg

Théorème de Tarski–Seidenberg : stabilité par projection

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique alors $\pi(S)$ l'est aussi, où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Corollaire 1

Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ est semi-algébrique alors X et $\text{Im}(f)$ sont semi-algébriques.

Corollaire 2 : élimination des quantificateurs

Si $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique, alors les ensembles suivants le sont aussi

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\} = \pi(S)$$

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in S\} = \mathbb{R}^n \setminus \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus S)$$

Exemple

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est semi-algébrique alors $\overline{A} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon \in]0, +\infty[, \exists y \in A, \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2 \right\}$ l'est aussi.

Théorème de prolongement de Whitney

Théorème – Whitney, 1934

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé. S'il existe des fonctions continues $(f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R})_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m}$ telles que

$$\forall z \in X, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \implies f_\alpha(x) - \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} \frac{f_{\alpha+\beta}(y)}{\beta!} (x-y)^\beta = o_{X \ni x, y \rightarrow z} (\|x-y\|^{m-|\alpha|}) \quad (1)$$

alors il existe $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^m telle que $D^\alpha F|_X = f_\alpha$ et F est C^ω sur $\mathbb{R}^n \setminus X$.

Une famille de fonctions continues $(f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R})_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m}$ vérifiant la condition (1) est appelée un *champ de Whitney d'ordre m sur X* .

Théorème de prolongement de Whitney

Théorème – Whitney, 1934

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé. S'il existe des fonctions continues $(f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R})_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m}$ telles que

$$\forall z \in X, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \implies f_\alpha(x) - \sum_{|\beta| \leq m - |\alpha|} \frac{f_{\alpha+\beta}(y)}{\beta!} (x - y)^\beta = o_{X \ni x, y \rightarrow z} (\|x - y\|^{m - |\alpha|}) \quad (1)$$

alors il existe $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^m telle que $D^\alpha F|_X = f_\alpha$ et F est C^ω sur $\mathbb{R}^n \setminus X$.

Une famille de fonctions continues $(f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R})_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m}$ vérifiant la condition (1) est appelée un *champ de Whitney d'ordre m sur X* .

Théorème – Kurdyka–Pawłucki, 1997, 2014 – Thamrongthanyalak, 2017

Si les fonctions f_α sont semi-algébriques alors on peut supposer que F est semi-algébrique.

Questions : existence de solutions préservant la semi-algèbricité ?

Question

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrique fermé et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébrique.

Si f admet un prolongement C^m , alors admet-elle un prolongement C^m et semi-algébrique ?

Question

Soient $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ semi-algébriques.

Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^m telle que $f(x) = A(x)g(x)$.

Alors, existe-t-il $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ semi-algébrique et C^m telle que $f(x) = A(x)\tilde{g}(x)$?

Questions : existence de solutions préservant la semi-algèbricité ?

Question

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrique fermé et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébrique.

Si f admet un prolongement C^m , alors admet-elle un prolongement C^m et semi-algébrique ?

Question

Soient $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ semi-algébriques.

Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^m telle que $f(x) = A(x)g(x)$.

Alors, existe-t-il $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ semi-algébrique et C^m telle que $f(x) = A(x)\tilde{g}(x)$?

- Aschenbrenner–Thamrongthanyalak (2019) : n quelconque et resp. $m = 1$ et $m = 0$.
- Fefferman–Luli (2022) : $n = 2$ et m quelconque.

Questions : existence de solutions préservant la semi-algèbricité ?

Question

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrique fermé et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-algébrique.
Si f admet un prolongement C^m , alors admet-elle un prolongement C^m et semi-algébrique ?

Question

Soient $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ semi-algébriques.
Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^m telle que $f(x) = A(x)g(x)$.
Alors, existe-t-il $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ semi-algébrique et C^m telle que $f(x) = A(x)\tilde{g}(x)$?

- Aschenbrenner–Thamrongthanyalak (2019) : n quelconque et resp. $m = 1$ et $m = 0$.
- Fefferman–Luli (2022) : $n = 2$ et m quelconque.
- Bierstone–C.–Milman (2021) : n, m quelconques mais avec perte de régularité.

Présentation des résultats

Théorème – Bierstone–C.–Milman, 2020

Étant donné $X \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrique fermé, il existe $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-algébrique et admet un prolongement de classe $C^{r(m)}$, alors f admet un prolongement semi-algébrique de classe C^m .

Présentation des résultats

Théorème – Bierstone–C.–Milman, 2020

Étant donné $X \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrique fermé, il existe $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-algébrique et admet un prolongement de classe $C^{r(m)}$, alors f admet un prolongement semi-algébrique de classe C^m .

Théorème – Bierstone–C.–Milman, 2020

Étant donnée $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ semi-algébrique, il existe $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de sorte que : Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ semi-algébrique s'écrit $F(x) = A(x)G(x)$ pour G de classe $C^{r(m)}$, alors $F(x) = A(x)\tilde{G}(x)$ pour $\tilde{G}(x)$ semi-algébrique de classe C^m .

Présentation des résultats - Vers une généralisation commune

Problème du prolongement

On considère $X \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrique fermé.

Par résolution des singularités, il existe $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ Nash propre définie sur une sous-variété Nash telle que $X = \varphi(M)$.

Étant donnés $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, on a $g|_X = f$ si et seulement si

$$\forall y \in M, g(\varphi(y)) = \tilde{f}(y)$$

où $\tilde{f} = f \circ \varphi$.

Présentation des résultats - Vers une généralisation commune

Problème du prolongement

On considère $X \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrique fermé.

Par résolution des singularités, il existe $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ Nash propre définie sur une sous-variété Nash telle que $X = \varphi(M)$.

Étant donnés $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, on a $g|_X = f$ si et seulement si

$$\forall y \in M, g(\varphi(y)) = \tilde{f}(y)$$

où $\tilde{f} = f \circ \varphi$.

Système d'équations

On considère l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, A(x)G(x) = F(x).$$

Par résolution des singularités, il existe $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ Nash propre définie sur une sous-variété Nash telle qu'après composition on obtienne

$$\forall y \in M, \tilde{A}(y)G(\varphi(y)) = \tilde{F}(y)$$

où $\tilde{A}$ est Nash et $\tilde{F} := F \circ \varphi$.

Le résultat principal

Théorème – Bierstone–C.–Milman, 2020

Soient $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ Nash et $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ Nash propre définie sur $M \subset \mathbb{R}^N$ une sous-variété Nash.

Il existe $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante :

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ semi-algébrique s'écrit

$$f(x) = A(x)g(\varphi(x))$$

pour $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $C^{r(m)}$ alors

$$f(x) = A(x)\tilde{g}(\varphi(x))$$

pour $\tilde{g}$ semi-algébrique de classe C^m .

Le cœur de la démonstration : récurrence sur la dimension

En passant aux développements de Taylor, l'équation $f(x) = A(x)g(\varphi(x))$ devient

$$\forall b \in B, \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^k f(\mathbf{x}) \equiv T_a^k A(\mathbf{x}) G(b, T_a^k \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{k+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p \quad (2)$$

où $G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \in C^0(B)[\mathbf{y}]$ est un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre k .

Le cœur de la démonstration : récurrence sur la dimension

En passant aux développements de Taylor, l'équation $f(x) = A(x)g(\varphi(x))$ devient

$$\forall b \in B, \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^k f(\mathbf{x}) \equiv T_a^k A(\mathbf{x}) G(b, T_a^k \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{k+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p \quad (2)$$

où $G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \in C^0(B)[\mathbf{y}]$ est un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre k .

Hérédité

Soit $B \subset \varphi(M)$ semi-algébrique fermé. Il existe $B' \subset B$ semi-algébrique fermé, où $\dim B' < \dim B$, tel que si (2) admet une solution sur B' alors (2) admet une solution sur B (modulo une perte de régularité).

Le cœur de la démonstration : récurrence sur la dimension

En passant aux développements de Taylor, l'équation $f(x) = A(x)g(\varphi(x))$ devient

$$\forall b \in B, \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^k f(\mathbf{x}) \equiv T_a^k A(\mathbf{x}) G(b, T_a^k \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{k+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p \quad (2)$$

où $G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \in C^0(B)[\mathbf{y}]$ est un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre k .

Hérédité

Soit $B \subset \varphi(M)$ semi-algébrique fermé. Il existe $B' \subset B$ semi-algébrique fermé, où $\dim B' < \dim B$, tel que si (2) admet une solution sur B' alors (2) admet une solution sur B (modulo une perte de régularité).

L'hypothèse de l'implication permet de supposer que le second membre de (2) est nul sur B' .

Le cœur de la démonstration : récurrence sur la dimension

En passant aux développements de Taylor, l'équation $f(x) = A(x)g(\varphi(x))$ devient

$$\forall b \in B, \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^k f(\mathbf{x}) \equiv T_a^k A(\mathbf{x}) G(b, T_a^k \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{k+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p \quad (2)$$

où $G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \in C^0(B)[\mathbf{y}]$ est un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre k .

Hérédité

Soit $B \subset \varphi(M)$ semi-algébrique fermé. Il existe $B' \subset B$ semi-algébrique fermé, où $\dim B' < \dim B$, tel que si (2) admet une solution sur B' alors (2) admet une solution sur B (modulo une perte de régularité).

L'hypothèse de l'implication permet de supposer que le second membre de (2) est nul sur B' .

A - Régularité de Whitney

Il existe $\rho \in \mathbb{N}$ tel que si $G \in C^0(B)[\mathbf{y}]$

- 1 est nul sur B' , et,
- 2 est un champ de Whitney d'ordre $l \geq k\rho$ sur $B \setminus B'$,

alors c'est un champ de Whitney d'ordre k sur B .

Le module des relations au-dessus de $b \in \varphi(M)$

$$T_a^r f(\mathbf{x}) \equiv T_a^r A(\mathbf{x}) G(b, T_a^r \varphi(\mathbf{x})) \bmod (\mathbf{x})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p \quad (3)$$

$$G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \in C^0(B)[\mathbf{y}]$$

B - Fonction de Chevalley

Étant donné $l \in \mathbb{N}$, il existe $r(l) := r \geq l$ tel que les g_α , $|\alpha| \leq l$, sont uniquement déterminés par (3).

Le module des relations au-dessus de $b \in \varphi(M)$

$$T_a^r f(\mathbf{x}) \equiv T_a^r A(\mathbf{x}) G(b, T_a^r \varphi(\mathbf{x})) \bmod (\mathbf{x})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p \quad (3)$$

$$G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \in C^0(B)[\mathbf{y}]$$

B - Fonction de Chevalley

Étant donné $l \in \mathbb{N}$, il existe $r(l) := r \geq l$ tel que les g_α , $|\alpha| \leq l$, sont uniquement déterminés par (3).

- $\mathcal{R}_r(b) := \{W \in \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^q : \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^r A(\mathbf{x}) W (\tilde{T}_a^r \varphi(\mathbf{x})) \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p\},$

Le module des relations au-dessus de $b \in \varphi(M)$

$$T_a^r f(\mathbf{x}) \equiv T_a^r A(\mathbf{x}) G(b, T_a^r \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p \quad (3)$$

$$G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \in C^0(B)[\mathbf{y}]$$

B - Fonction de Chevalley

Étant donné $l \in \mathbb{N}$, il existe $r(l) := r \geq l$ tel que les g_α , $|\alpha| \leq l$, sont uniquement déterminés par (3).

Formellement, on stratifie $B = \bigsqcup_{\tau=1}^{\tau_{\max}} \Lambda_\tau$ tel que pour chaque τ , il existe $r \geq l$ vérifiant

$$\forall b \in \Lambda_\tau, \pi_l(\mathcal{R}_r(b)) = \pi_l(\mathcal{R}_{r-1}(b)) \quad (4)$$

où

- $\mathcal{R}_r(b) := \{W \in \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^q : \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^r A(\mathbf{x}) W (\tilde{T}_a^r \varphi(\mathbf{x})) \equiv 0 \mod \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p\}$,
- π_l est la troncation de degré l .

Le module des relations au-dessus de $b \in \varphi(M)$

$$T_a^r f(\mathbf{x}) \equiv T_a^r A(\mathbf{x}) G(b, T_a^r \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p \quad (3)$$

$$G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \in C^0(B)[\mathbf{y}]$$

B - Fonction de Chevalley

Étant donné $l \in \mathbb{N}$, il existe $r(l) := r \geq l$ tel que les g_α , $|\alpha| \leq l$, sont uniquement déterminés par (3).

Formellement, on stratifie $B = \bigsqcup_{\tau=1}^{\tau_{\max}} \Lambda_\tau$ tel que pour chaque τ , il existe $r \geq l$ vérifiant

$$\forall b \in \Lambda_\tau, \pi_l(\mathcal{R}_r(b)) = \pi_l(\mathcal{R}_{r-1}(b)) \quad (4)$$

où

- $\mathcal{R}_r(b) := \{W \in \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^q : \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^r A(\mathbf{x}) W (\tilde{T}_a^r \varphi(\mathbf{x})) \equiv 0 \mod \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p\}$,
- π_l est la troncation de degré l .

On définit $B' := \bigcup_{\dim \Lambda_\tau < \dim B} \Lambda_\tau$; alors $\forall \tau, \overline{\Lambda_\tau} \setminus \Lambda_\tau \subset B'$.

Le module des relations au-dessus de $b \in \varphi(M)$

$$T_a^r f(\mathbf{x}) \equiv T_a^r A(\mathbf{x}) G(b, T_a^r \varphi(\mathbf{x})) \bmod (\mathbf{x})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p \quad (3)$$

$$G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha \in C^0(B)[\mathbf{y}]$$

B - Fonction de Chevalley

Étant donné $l \in \mathbb{N}$, il existe $r(l) := r \geq l$ tel que les g_α , $|\alpha| \leq l$, sont uniquement déterminés par (3).

Formellement, on stratifie $B = \bigsqcup_{\tau=1}^{\tau_{\max}} \Lambda_\tau$ tel que pour chaque τ , il existe $r \geq l$ vérifiant

$$\forall b \in \Lambda_\tau, \pi_l(\mathcal{R}_r(b)) = \pi_l(\mathcal{R}_{r-1}(b)) \quad (4)$$

où

- $\mathcal{R}_r(b) := \{W \in \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^q : \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^r A(\mathbf{x}) W(\tilde{T}_a^r \varphi(\mathbf{x})) \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p\}$,
- π_l est la troncation de degré l .

On définit $B' := \bigcup_{\dim \Lambda_\tau < \dim B} \Lambda_\tau$; alors $\forall \tau, \overline{\Lambda_\tau} \setminus \Lambda_\tau \subset B'$.

Problème : la relation (4) est seulement ponctuelle...

Division formelle d'Hironaka

- $F = \sum F_{(\alpha,j)} \mathbf{y}^{(\alpha,j)} \in \mathbb{R}[[y_1, \dots, y_n]]^q$ où $\mathbf{y}^{(\alpha,j)} = (0, \dots, 0, y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}, 0, \dots, 0)$.
- On ordonne totalement $\mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\} \ni (\alpha, j)$ par $\text{lex}(|\alpha|, j, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Division formelle d'Hironaka

- $F = \sum F_{(\alpha,j)} \mathbf{y}^{(\alpha,j)} \in \mathbb{R}[[y_1, \dots, y_n]]^q$ où $\mathbf{y}^{(\alpha,j)} = (0, \dots, 0, y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}, 0, \dots, 0)$.
- On ordonne totalement $\mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\} \ni (\alpha, j)$ par $\text{lex}(|\alpha|, j, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
- $\text{supp } F := \{(\alpha, j) : F_{(\alpha,j)} \neq 0\}$
 - $\exp F := \min(\text{supp } F)$

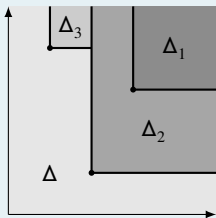
Division formelle d'Hironaka

- $F = \sum F_{(\alpha,j)} \mathbf{y}^{(\alpha,j)} \in \mathbb{R}[[y_1, \dots, y_n]]^q$ où $\mathbf{y}^{(\alpha,j)} = (0, \dots, 0, y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}, 0, \dots, 0)$.
- On ordonne totalement $\mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\} \ni (\alpha, j)$ par $\text{lex}(|\alpha|, j, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
- $\text{supp } F := \{(\alpha, j) : F_{(\alpha,j)} \neq 0\}$ • $\exp F := \min(\text{supp } F)$

Théorème – Hironaka 1964, Bierstone–Milman 1987

Soient $\Phi_1, \dots, \Phi_v \in \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^q$.

Soient $\Delta_1 := \exp \Phi_1 + \mathbb{N}^n$, $\Delta_i := (\exp \Phi_i + \mathbb{N}^n) \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \Delta_k$, et $\Delta := (\mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\}) \setminus \bigcup_{k=1}^v \Delta_k$.



Alors $\forall F \in \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^q$, $\exists ! Q_i \in \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]$, $R \in \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^q$ tels que

- $F = \sum_{i=1}^v Q_i \Phi_i + R$
- $\exp \Phi_i + \text{supp } Q_i \subset \Delta_i$
- $\text{supp } R \subset \Delta$

De plus $(\alpha_i, j_i) + \exp Q_i \geq \exp F$ et $\exp R \geq \exp F$.

Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 1$

Le *diagramme des exposants initiaux* de $\mathcal{R}_r(b)$ est

$$\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b)) := \{\exp F : F \in \mathcal{R}_r(b) \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\}.$$

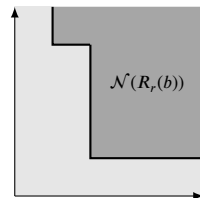


Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 1$

Le *diagramme des exposants initiaux* de $\mathcal{R}_r(b)$ est

$$\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b)) := \{\exp F : F \in \mathcal{R}_r(b) \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\}.$$

Fait : quitte à raffiner la stratification, on peut supposer que $\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b))$ est constant sur Λ_τ .

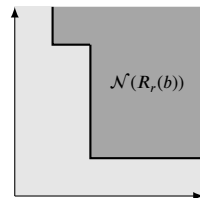


Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 1$

Le *diagramme des exposants initiaux* de $\mathcal{R}_r(b)$ est

$$\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b)) := \{\exp F : F \in \mathcal{R}_r(b) \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\}.$$

Fait : quitte à raffiner la stratification, on peut supposer que $\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b))$ est constant sur Λ_τ .

Fixons une strate Λ_τ et $b \in \Lambda_\tau$.

Pour chaque sommet, on considère un représentant $\Phi_i \in \mathcal{R}_r(b)$.

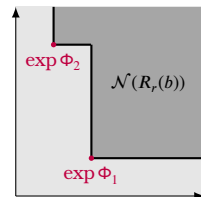


Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 1$

Le *diagramme des exposants initiaux* de $\mathcal{R}_r(b)$ est

$$\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b)) := \{\exp F : F \in \mathcal{R}_r(b) \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\}.$$

Fait : quitte à raffiner la stratification, on peut supposer que $\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b))$ est constant sur Λ_τ .

Fixons une strate Λ_τ et $b \in \Lambda_\tau$.

Pour chaque sommet, on considère un représentant $\Phi_i \in \mathcal{R}_r(b)$.

Par hypothèse, il existe $W_b \in \mathbb{R}[\mathbf{y}]^q$ tel que

$$\forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^t f(\mathbf{x}) \equiv T_a^t A(\mathbf{x}) W_b(T_a^t \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{t+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p. \quad (5)$$

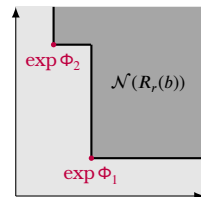


Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 1$

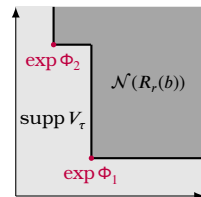
Le diagramme des exposants initiaux de $\mathcal{R}_r(b)$ est

$$\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b)) := \{\exp F : F \in \mathcal{R}_r(b) \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\}.$$

Fait : quitte à raffiner la stratification, on peut supposer que $\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b))$ est constant sur Λ_τ .

Fixons une strate Λ_τ et $b \in \Lambda_\tau$.

Pour chaque sommet, on considère un représentant $\Phi_i \in \mathcal{R}_r(b)$.



Par hypothèse, il existe $W_b \in \mathbb{R}[\mathbf{y}]^q$ tel que

$$\forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^t f(\mathbf{x}) \equiv T_a^t A(\mathbf{x}) W_b(T_a^t \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{t+1} \mathbb{R}[\mathbf{x}]^p. \quad (5)$$

Par division formelle d'Hironaka, on a $W_b(\mathbf{y}) = \sum Q_i(\mathbf{y}) \Phi_i(\mathbf{y}) + V_\tau(b, \mathbf{y})$.

Alors $V_\tau(b, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}[\mathbf{y}]^q$ vérifie

$$W_b(\mathbf{y}) - V_\tau(b, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}_r(b) \quad \text{and} \quad \text{supp } V_\tau(b, \mathbf{y}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b))^c.$$

Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 1$

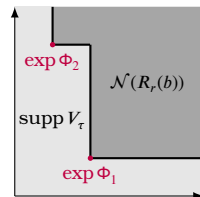
Le diagramme des exposants initiaux de $\mathcal{R}_r(b)$ est

$$\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b)) := \{\exp F : F \in \mathcal{R}_r(b) \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}^n \times \{1, \dots, q\}.$$

Fait : quitte à raffiner la stratification, on peut supposer que $\mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b))$ est constant sur Λ_τ .

Fixons une strate Λ_τ et $b \in \Lambda_\tau$.

Pour chaque sommet, on considère un représentant $\Phi_i \in \mathcal{R}_r(b)$.



Par hypothèse, il existe $W_b \in \mathbb{R}[\mathbf{y}]^q$ tel que

$$\forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^t f(\mathbf{x}) \equiv T_a^t A(\mathbf{x}) W_b(T_a^t \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{t+1} \mathbb{R}[\mathbf{x}]^p. \quad (5)$$

Par division formelle d'Hironaka, on a $W_b(\mathbf{y}) = \sum Q_i(\mathbf{y}) \Phi_i(\mathbf{y}) + V_\tau(b, \mathbf{y})$.

Alors $V_\tau(b, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}[\mathbf{y}]^q$ vérifie

$$W_b(\mathbf{y}) - V_\tau(b, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}_r(b) \quad \text{and} \quad \text{supp } V_\tau(b, \mathbf{y}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{R}_r(b))^c.$$

Lemme

$G_\tau(b, \mathbf{y}) := \pi_l(V_\tau(b, \mathbf{y}))$ est un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre l sur Λ_τ vérifiant (5) modulo $(\mathbf{x})^{r+1}$.

Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 2$

Grâce au lemme suivant, il suffit de montrer que $D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) = D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y})$.

Lemme de Borel à paramètre

Soit Λ une sous-variété C^m et $F = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{f_\alpha(a)}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha \in C^0(\Lambda)[\mathbf{x}]$.

Alors F est un champ de Whitney d'ordre m sur Λ ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{m-1} \in C^1(\Lambda)[\mathbf{x}] \\ \forall a \in \Lambda, \forall u \in T_a \Lambda, D_{a,u} F^{m-1}(a, \mathbf{x}) = D_{\mathbf{x},u} F(a, \mathbf{x}) \end{array} \right.$$

Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 2$

Pour simplifier la situation, supposons que φ soit l'identité.

Appliquons $D_{b,v} - D_{\mathbf{y},v}$ à

$$T_a^r f(\mathbf{y}) \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) V_\tau(b, \mathbf{y}) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^p$$

Ainsi

$$0 \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) (D_{b,v} V_\tau^{r-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} V_\tau(b, \mathbf{y})) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^p$$

Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 2$

Pour simplifier la situation, supposons que φ soit l'identité.

Appliquons $D_{b,v} - D_{\mathbf{y},v}$ à

$$T_a^r f(\mathbf{y}) \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) V_\tau(b, \mathbf{y}) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^p$$

Ainsi

$$0 \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) (D_{b,v} V_\tau^{r-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} V_\tau(b, \mathbf{y})) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^p$$

d'où

$$D_{b,v} V_\tau^{r-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} V_\tau(b, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}_{r-1}(b)$$

Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 2$

Pour simplifier la situation, supposons que φ soit l'identité.

Appliquons $D_{b,v} - D_{\mathbf{y},v}$ à

$$T_a^r f(\mathbf{y}) \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) V_\tau(b, \mathbf{y}) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[\mathbf{y}]^p$$

Ainsi

$$0 \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) (D_{b,v} V_\tau^{r-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} V_\tau(b, \mathbf{y})) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[\mathbf{y}]^p$$

d'où

$$D_{b,v} V_\tau^{r-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} V_\tau(b, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}_{r-1}(b)$$

donc, d'après la fonction de Chevalley,

$$D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y}) \in \pi_{l-1}(\mathcal{R}_{r-1}(b)) = \pi_{l-1}(\mathcal{R}_r(b))$$

Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 2$

Pour simplifier la situation, supposons que φ soit l'identité.

Appliquons $D_{b,v} - D_{\mathbf{y},v}$ à

$$T_a^r f(\mathbf{y}) \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) V_\tau(b, \mathbf{y}) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^p$$

Ainsi

$$0 \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) (D_{b,v} V_\tau^{r-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} V_\tau(b, \mathbf{y})) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^p$$

d'où

$$D_{b,v} V_\tau^{r-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} V_\tau(b, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}_{r-1}(b)$$

donc, d'après la fonction de Chevalley,

$$D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y}) \in \pi_{l-1}(\mathcal{R}_{r-1}(b)) = \pi_{l-1}(\mathcal{R}_r(b))$$

Mais

$$\text{supp} (D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y})) \subset \Delta_\tau$$

et ainsi, $D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y}) = 0$,

i.e. $D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) = D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y})$.

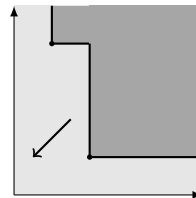


Diagramme des exposants initiaux et construction de G sur $\Lambda_\tau - 2$

Pour simplifier la situation, supposons que φ soit l'identité.

Appliquons $D_{b,v} - D_{\mathbf{y},v}$ à

$$T_a^r f(\mathbf{y}) \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) V_\tau(b, \mathbf{y}) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^p$$

Ainsi

$$0 \equiv T_a^r A(\mathbf{y}) (D_{b,v} V_\tau^{r-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} V_\tau(b, \mathbf{y})) \mod (\mathbf{y})^{r+1} \mathbb{R}[[\mathbf{y}]]^p$$

d'où

$$D_{b,v} V_\tau^{r-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} V_\tau(b, \mathbf{y}) \in \mathcal{R}_{r-1}(b)$$

donc, d'après la fonction de Chevalley,

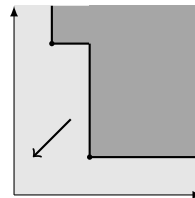
$$D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y}) \in \pi_{l-1}(\mathcal{R}_{r-1}(b)) = \pi_{l-1}(\mathcal{R}_r(b))$$

Mais

$$\text{supp} (D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y})) \subset \Delta_\tau$$

et ainsi, $D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y}) = 0$,

i.e. $D_{b,v} G_\tau^{l-1}(b, \mathbf{y}) = D_{\mathbf{y},v} G_\tau(b, \mathbf{y})$.



Recollement strate à strate

C - Recollement strate à strate : inégalité de Łojasiewicz

Fixons une strate Λ_τ . Il existe $\sigma \in \mathbb{N}$ tel que si $t \geq r + \sigma$ alors $\lim_{b \rightarrow \overline{\Lambda_\tau} \setminus \Lambda_\tau} V_\tau^{\beta,j}(b) = 0$.

Rappel : le second membre de l'équation est trivial sur B' donc sur $\overline{\Lambda_\tau} \setminus \Lambda_\tau$.

Résumé

On a construit $G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha$ un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre k tel que

$$\forall b \in B, \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^k f(\mathbf{x}) \equiv T_a^k A(\mathbf{x}) G(b, T_a^k \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{k+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p$$

Résumé

On a construit $G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha$ un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre k tel que

$$\forall b \in B, \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^k f(\mathbf{x}) \equiv T_a^k A(\mathbf{x}) G(b, T_a^k \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{k+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p$$

Perte de régularité

Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère $l \geq k\rho$, puis $r \geq r(l)$ et enfin $t(k) := t \geq r + \sigma$ où

- A. ρ provient de la perte de régularité de Whitney,
- B. $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est un majorant de la fonction de Chevalley associée à chaque strate,
- C. σ est un majorant de la perte de régularité de Łojasiewicz sur chaque strate.

Résumé

On a construit $G(b, \mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{g_\alpha(b)}{\alpha!} \mathbf{y}^\alpha$ un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre k tel que

$$\forall b \in B, \forall a \in \varphi^{-1}(b), T_a^k f(\mathbf{x}) \equiv T_a^k A(\mathbf{x}) G(b, T_a^k \varphi(\mathbf{x})) \mod (\mathbf{x})^{k+1} \mathbb{R}[[\mathbf{x}]]^p$$

Perte de régularité

Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère $l \geq k\rho$, puis $r \geq r(l)$ et enfin $t(k) := t \geq r + \sigma$ où

- A. ρ provient de la perte de régularité de Whitney,
- B. $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est un majorant de la fonction de Chevalley associée à chaque strate,
- C. σ est un majorant de la perte de régularité de Łojasiewicz sur chaque strate.

On a montré que pour $B \subset \varphi(M)$ semi-algébrique fermé, il existe $B' \subset B$ semi-algébrique fermé vérifiant $\dim(B') < \dim(B)$ et $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tels que si l'équation au niveau des développements de Taylor admet sur B' une solution donnée par un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre $t(k)$ alors elle admet sur B une solution donnée par un champ de Whitney semi-algébrique d'ordre k .

