UNIVERSITÉ D'ANGERS
L3

Algèbre bilinéaire anti-symétrique
Devoir Maison

1. Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle définie positive. Montrer qu'il existe $R \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle définie positive et polynomiale en S telle que $R^2 = S$.
   `Indice` : polynômes interpolateurs de Lagrange.
2. Soit $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A \}$ l'espace des matrices antisymétriques réelles et $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ inversible.
   (a) Montrer que n est pair.
   (b) Soit $\lambda > 0$ une valeur propre de ${}^tAA$ et x un vecteur propre associé. Soit $\mu = \sqrt{\lambda}$.
      i. Montrer que $\langle x, Ax \rangle = 0$ où $\langle -, - \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
      ii. Montrer que $W = \mathrm{Vect}(x, \mu^{-1}Ax)$ est un plan stable par A, d'orthogonal stable par A.
   (c) Montrer par récurrence qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ est diagonale par blocs de type μJ_1.
3. Soit ω une forme *symplectique* sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une forme bilinéaire non dégénérée et anti-symétrique : $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on ait
   $$\omega(x, y) = \langle Ax, y \rangle.$$
   (b) Soit $p = n/2$. Déduire de 2(c) qu'il existe une base orthogonale $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_p)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tous $1 \leq k, \ell \leq p$ on ait
   $$\omega(e_k, f_\ell) = \delta_{k,\ell}$$
   $$\omega(e_k, e_\ell) = \omega(f_k, f_\ell) = 0.$$
4. On conserve ω et A comme au-dessus. Soit R donnée par la question 1 pour $S = {}^tAA$.
   (a) Montrer que A et R commutent.
   (b) Soit $J = R^{-1}A$.
      i. Montrer que $J^* = -J = J^{-1}$.
      ii. Montrer que J est un *symplectomorphisme* : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a
      $$\omega(Jx, Jy) = \omega(x, y).$$
      iii. Montrer que $\psi := \omega(-, J-)$ définit un produit scalaire.
5. On conserve J et ψ comme au-dessus. Comme $J^2 = -I_n$, on peut munir $\mathbb{R}^n$ d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel via $iv = Jv$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. Soit H la forme $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par $H(x, y) = \psi(x, y) + i\omega(x, y)$. Montrer que H est définie positive et *hermitienne* : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a :
   $$H(ix, y) = -iH(x, y)$$
   $$H(x, iy) = iH(x, y)$$
   $$H(y, x) = \overline{H(x, y)}.$$
   On a montré que pour toute forme symplectique ω sur $\mathbb{R}^n$, il existe une *structure complexe* J telle que ω est la partie imaginaire d'une forme hermitienne sur $(\mathbb{R}^n, J)$.