

Algèbre linéaire et bilinéaire  
Contrôle Continu n°1 du 16 Octobre 2023 - 2h

Documents et appareils électroniques interdits. Toute réponse doit être justifiée. Le barème est donné à titre indicatif et totalise plus de 20 points. Le sujet est volontairement long, ne bloquez pas sur un exercice !

**Exercice 1** (5 pts).

1. Donner la définition de la diagonalisabilité pour un endomorphisme  $u : E \rightarrow E$  avec  $E$  de dimension finie, et trois conditions nécessaires et suffisantes.
2. Énoncer le théorème de Cayley–Hamilton.

**Exercice 2** (6 pts). On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Exprimer  $M^2$  en fonction de  $M$  et  $I_4$ .
2. Calculer le polynôme minimal de  $M$ . La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?
3. Quel est le rang de  $M + I_4$  ? En déduire le polynôme caractéristique de  $M$ .
4. Montrer que  $M$  est inversible et donner son inverse en fonction de  $M$  et  $I_4$ .

**Exercice 3** (7 pts). Soit  $E$  l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  des fonctions continues  $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . On définit l'application  $u : E \rightarrow E$  par

$$u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t)f(t)dt$$

pour tout  $f \in E$  et tout  $x \in [-\pi, \pi]$ .

1. Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Montrer que le rang de  $u$  est 2.
3. Montrer que  $u$  n'admet qu'une valeur propre non nulle et donner une base de l'espace propre associé.
4. Caractérisez l'appartenance de  $f$  à  $\ker(u)$  en utilisant les coefficients de Fourier de  $f$ .

**Exercice 4** (10 pts). On considère la matrice  $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & -m-1 & m+1 \\ m-2 & -m & m+2 \\ 2m-1 & -2m+1 & 2m+1 \end{pmatrix}$  où  $m$  est un paramètre réel.

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A_m$ .
2. On suppose  $m \neq -1$  et  $m \neq 1$ . Montrer que  $A_m$  est diagonalisable. Quel est son polynôme minimal ?
3. La matrice  $A_{-1}$  est-elle diagonalisable ? Donner son polynôme minimal.
4. Montrer que  $A_1$  n'est pas diagonalisable. Donner son polynôme minimal et une base de trigonalisation.

**Exercice 5** (8 pts). Soit  $E$  l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On note  $E^\vee$  l'espace vectoriel des formes linéaires  $E \rightarrow \mathbb{k}$  et  $\text{Tr}$  la fonction trace. Pour tout  $A \in E$  on note  $\varphi_A$  la forme linéaire  $B \mapsto \text{Tr}(AB)$ .

1. Montrer que  $\varphi : E \rightarrow E^\vee, A \mapsto \varphi_A$  est linéaire.
2. Déterminer le noyau de  $\varphi$ .
3. Montrer que pour toute forme linéaire  $f \in E^\vee$  il existe  $A \in E$  tel que  $f(B) = \text{Tr}(AB)$  pour tout  $B \in E$ .
4. Montrer que si  $f \in E^\vee$  satisfait  $f(XY) = f(YX)$  pour tous  $X, Y \in E$ , alors  $f$  est colinéaire à  $\text{Tr}$ .

*Indice* : Pour  $A \in E$  on pourra utiliser l'implication suivante :

$$\forall X \in E, AX = XA \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{k}, A = \alpha I_n.$$

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Solution du CC n°1 du 16 Octobre 2023 - 2h**

**Exercice 1** (5 pts).

1. Donner la définition de la diagonalisabilité pour un endomorphisme  $u : E \rightarrow E$  avec  $E$  de dimension finie, et trois conditions nécessaires et suffisantes.
2. Énoncer le théorème de Cayley–Hamilton.

*Solution*

1.  $u$  est dit diagonalisable si  $E$  est la somme directe des espaces propres de  $u$ . Ce qui équivaut à ce que pour toute valeur propre l'espace propre associé a même dimension que sa multiplicité dans  $\chi_u$ , ou à être annulé par un polynôme simplement scindé, ou à ce que le polynôme minimal soit simplement scindé.
2. Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $\dim E < +\infty$ , on a  $\chi_u(u) = 0$ .

**Exercice 2** (6 pts). On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Exprimer  $M^2$  en fonction de  $M$  et  $I_4$ .
2. Calculer le polynôme minimal de  $M$ . La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?
3. Quel est le rang de  $M + I_4$  ? En déduire le polynôme caractéristique de  $M$ .
4. Montrer que  $M$  est inversible et donner son inverse en fonction de  $M$  et  $I_4$ .

*Solution*

1.  $M^2 = 3I + 2M$
2.  $P_M | X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$  et  $M$  non scalaire donc  $P_M = (X + 1)(X - 3)$ .
3.  $\text{rang}(M + I) = 1$  donc  $\dim E_{-1}(M) = 3$  donc  $(X + 1)^3(X - 3) | \chi_M$  et ces deux polynômes sont unitaires de degré 4, donc égaux.
4.  $M(M - 2I) = 3I$  donc  $M$  est inversible d'inverse  $(1/3)(M - 2I)$ .

**Exercice 3** (7 pts). Soit  $E$  l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  des fonctions continues  $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . On définit l'application  $u : E \rightarrow E$  par

$$u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x - t)f(t)dt$$

pour tout  $f \in E$  et tout  $x \in [-\pi, \pi]$ .

1. Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Montrer que le rang de  $u$  est 2.
3. Montrer que  $u$  n'admet qu'une valeur propre non nulle et donner une base de l'espace propre associé.
4. Caractérisez l'appartenance de  $f$  à  $\ker(u)$  en utilisant les coefficients de Fourier de  $f$ .

*Solution*

1. La multiplication et l'intégration sont des opérations linéaires.
2. Pour tous  $f \in E$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  on a

$$\begin{aligned} u(f)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x) \cos(t) + \sin(x) \sin(t))f(t)dt \\ &= \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)f(t)dt \right) \cos(x) + \left( \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)f(t)dt \right) \sin(x) \end{aligned}$$

donc  $\text{Im}(u) \subseteq \text{Vect}(\cos, \sin)$ . Par ailleurs on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 = \pi \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin \cos = 0$$

donc  $u(\cos) = \pi \cos$  et  $u(\sin) = \pi \sin$ , et donc  $\text{Im}(u) = \text{Vect}(\cos, \sin)$  est de dimension 2.

3. Soit  $\lambda \neq 0$  et  $f \in E \setminus \{0\}$  tels que  $u(f) = \lambda f$ . Alors  $f = (1/\lambda)u(f) \in \text{Im}(u)$  et d'après la question précédente  $\lambda = \pi$ . Une base de  $E_\pi(u)$  est donnée par  $(\cos, \sin)$ .
4. Pour tout  $f \in E$  on pose  $a_0(f) = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f$  et pour tout entier  $n > 0$  :

$$a_n(f) = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Alors  $f \in \ker(u)$  ssi  $a_1(f) = b_1(f) = 0$ .

**Exercice 4** (10 pts). On considère la matrice  $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & -m-1 & m+1 \\ m-2 & -m & m+2 \\ 2m-1 & -2m+1 & 2m+1 \end{pmatrix}$  où  $m$  est un paramètre réel.

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A_m$ .
2. On suppose  $m \neq -1$  et  $m \neq 1$ . Montrer que  $A_m$  est diagonalisable. Quel est son polynôme minimal ?
3. La matrice  $A_{-1}$  est-elle diagonalisable ? Donner son polynôme minimal.
4. Montrer que  $A_1$  n'est pas diagonalisable. Donner son polynôme minimal et une base de trigonalisation.

*Solution*

1. On obtient  $\chi_{A_m} = -(X-2)(X+2)(X-2m)$ .
2.  $\chi_{A_m}$  est alors simplement scindé, donc  $A_m$  est diagonalisable et  $P_{A_m} = \chi_{A_m}$ .
3.  $-2$  est racine double et  $E_{-2}(A_{-1}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 3y + z = 0\}$  est un plan donc  $A_{-1}$  est diagonalisable et son polynôme minimal est  $(X-2)(X+2)$ .
4.  $2$  est racine double et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$$

donc  $\dim(E_2(A_1)) = 1$ ,  $A_1$  n'est pas diagonalisable et  $P_{A_1} = \chi_{A_1}$ . On vérifie que  $(1, 1, 0)$  est propre pour  $-2$  et on complète  $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$  en n'importe quelle base pour obtenir une base de trigonalisation, eg avec  $(1, 0, 0)$ .

**Exercice 5** (8 pts). Soit  $E$  l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On note  $E^\vee$  l'espace vectoriel des formes linéaires  $E \rightarrow \mathbb{k}$  et  $\text{Tr}$  la fonction trace. Pour tout  $A \in E$  on note  $\varphi_A$  la forme linéaire  $B \mapsto \text{Tr}(AB)$ .

1. Montrer que  $\varphi : E \rightarrow E^\vee, A \mapsto \varphi_A$  est linéaire.
  2. Déterminer le noyau de  $\varphi$ .
  3. Montrer que pour toute forme linéaire  $f \in E^\vee$  il existe  $A \in E$  tel que  $f(B) = \text{Tr}(AB)$  pour tout  $B \in E$ .
  4. Montrer que si  $f \in E^\vee$  satisfait  $f(XY) = f(YX)$  pour tous  $X, Y \in E$ , alors  $f$  est colinéaire à  $\text{Tr}$ .
- Indice* : Pour  $A \in E$  on pourra utiliser l'implication suivante :

$$\forall X \in E, AX = XA \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{k}, A = \alpha I_n.$$

*Solution*

1. Pour tous  $A, A', B \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{k}$  on a

$$\varphi_{A+\alpha A'}(B) = \text{Tr}((A + \alpha A')B) = \text{Tr}(AB) + \alpha \text{Tr}(A'B) = \varphi_A(B) + \alpha \varphi_{A'}(B)$$

donc  $\varphi_{A+\alpha A'} = \varphi_A + \alpha \varphi_{A'}$ .

2. Pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , on note  $E_{ij} \in E$  la matrice élémentaire qui a coefficient 1 en  $(i, j)$  et 0 partout ailleurs. Alors pour tout  $A \in E$ ,

$$\varphi_A = 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, \text{Tr}(AE_{ij}) = 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, A_{ji} = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

donc  $\ker \varphi = \{0\}$ .

3. On a  $\dim E = \dim E^\vee$  et  $\varphi$  injective, donc  $\varphi$  est surjective.
4. Soit  $f \in E^\vee$  telle que  $f(XY) = f(YX)$  pour tous  $X, Y \in E$ . D'après 3., il existe  $A \in E$  telle que  $f = \varphi_A$ . Alors

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in E, f(XY) = f(YX) &\Leftrightarrow \forall X, Y \in E, \text{Tr}(AXY) = \text{Tr}(AYX) \\ &\Leftrightarrow \forall X, Y \in E, \text{Tr}(AXY) = \text{Tr}(XAY) \\ &\Leftrightarrow \forall X \in E, \varphi_{AX-XA} = 0 \\ &\stackrel{2}{\Leftrightarrow} \forall X \in E, AX = XA \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{k}, A = \alpha I_n \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{k}, f = \alpha \text{Tr}. \end{aligned}$$

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°2 du 4 Décembre 2023 - 2h**

Documents et appareils électroniques interdits. Toute réponse doit être justifiée.  
Le barème est donné à titre indicatif.

**Exercice 1** (3+2pts).

1. Donner la définition (en précisant la signification de chaque terme de celle-ci) de produit scalaire.
2. Énoncer le théorème d'inertie de Sylvester sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2** (4+2pts). Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = f$ . On note  $G = \text{Im}(f)$  et  $H = \text{Ker}(f)$ . Soit  $t \in \mathbb{K}$ , et soit  $g = id_E + tf$ .

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de  $g$ .
2. Pour quelle valeur de  $t$ , l'endomorphisme  $g$  est-il inversible? Dans ce cas, donner une expression simple de  $g^{-1}$ .

**Exercice 3** (1+1+0.5+1.5+1+1pts). On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Résoudre  $M \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$  et en déduire une relation de dépendance linéaire entre les colonnes de  $M$ .
2. S'aider de cette relation pour calculer les racines du polynôme caractéristique de  $M$ , puis donner son polynôme minimal. [*Indice* : Il faut trouver  $-3$  et une racine double strictement positive!]
3. Donner la signature de la forme quadratique donnée par

$$Q(t, x, y, z) = t^2 + 4x^2 + 3y^2 + z^2 - 4tx + 6ty + 2tz - 4xz - 6yz$$

pour tout  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ .

4. Calculer une base orthonormée du plan de  $\mathbb{R}^4$  d'équations  $\begin{cases} t + x + z = 0 \\ t - y - z = 0 \end{cases}$ .
5. Calculer une base orthonormée de vecteurs propres de  $M$ .
6. En déduire des formes linéaires  $f_1, f_2, f_3$  sur  $\mathbb{R}^4$  telles que

$$Q(t, x, y, z) = -f_1(t, x, y, z)^2 + 2(f_2(t, x, y, z))^2 + f_3(t, x, y, z)^2$$

pour tout  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ .

**Exercice 4** (0.5+1.5+0.5+2+0.5+0.5+1+1pts). Soit  $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

pour toute paire de polynômes  $(P, Q)$ .

1. Montrer que  $\phi$  est bilinéaire et symétrique.
2. Montrer que  $\phi$  est définie positive.

3. Soit  $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'application définie par

$$u(P) = \frac{d}{dX}((1 - X^2)P')$$

pour tout polynôme  $P$ . Montrer que  $u$  est linéaire.

4. Montrer que  $u$  est symétrique vis-à-vis du produit scalaire  $\phi$ .

5. On fixe un entier  $n > 0$ . Montrer que  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $u$ . On note  $u_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$  l'endomorphisme induit.

6. Expliquer pourquoi  $u_n$  est diagonalisable.

7. Calculer  $u(X^k)$  pour tous  $0 \leq k \leq n$  et en déduire les valeurs propres de  $u_n$ .

8. Soit  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  une base propre pour  $u_n$ . Quelle est la valeur de

$$\int_{-1}^1 P_k(t)P_\ell(t)dt$$

pour toute paire d'entiers  $(k, \ell)$  telle que  $1 \leq k \neq \ell \leq n$ ?

REMARQUE : si on impose la condition  $P_k(1) = 1$  on obtient les polynômes dits de *Legendre*, donnés par la formule explicite

$$L_k = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dX^k} [(X^2 - 1)^k].$$

En effet ces polynômes sont orthogonaux (par multiples IPPs), de degré  $k$ , et valent 1 en 1. Ceci implique que la matrice de passage de  $(P_k)$  à  $(L_k)$  est l'identité.

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°2 du 4 Décembre 2023**  
SOLUTION

**Exercice 1** (3+2pts).

1. Donner la définition (en précisant la signification de chaque terme de celle-ci) de produit scalaire.
2. Énoncer le théorème d'inertie de Sylvester sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2** (4+2pts). Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = f$ . On note  $G = \text{Im}(f)$  et  $H = \text{Ker}(f)$ . Soit  $t \in \mathbb{K}$ , et soit  $g = id_E + tf$ .

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de  $g$ .
2. Pour quelle valeur de  $t$ , l'endomorphisme  $g$  est-il inversible? Dans ce cas, donner une expression simple de  $g^{-1}$ .

*Solution*

1. Déjà si  $t = 0$ , la seule valeur propre est 1, d'espace propre associée  $E$ .

Sinon on a  $f(f - id_E) = 0$  donc  $tf(tf - tid_E) = 0$  donc  $(g - id_E)(g - (1+t)id_E) = 0$  et  $g$  est diagonalisable car annulé par  $(X - 1)(X - (1+t))$ , simplement scindé vu que  $t \neq 0$ . Pour  $\lambda \in \{1, 1+t\}$ ,

$$\ker(g - \lambda id_E) = \ker(tf - (\lambda - 1)id_E) = \ker\left(f - \frac{\lambda - 1}{t}id_E\right) = \begin{cases} H & \text{si } \lambda = 1 \\ G & \text{si } \lambda = 1 + t \end{cases}$$

car, comme vu en TD, pour  $x \in E$ ,  $f(x) = x \Leftrightarrow x \in G$ . Pour conclure, quand  $t \neq 0$ , 1 est valeur propre d'espace propres associé  $H$  si ce dernier est non réduit à  $\{0\}$ , c'est-à-dire si  $f \neq id_E$ ; et  $1+t$  est valeur propre d'espace propre associé  $G$  si ce dernier est non réduit à  $\{0\}$ , c'est-à-dire si  $f \neq 0$ .

2. L'endomorphisme  $g$  est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre, donc dès que  $t \neq 1$  auquel cas  $g^2 - (2+t)g = -(1+t)id_E$  donc

$$g^{-1} = \frac{1}{1+t}((2+t)id_E - g) = \frac{1}{1+t}((1+t)id_E - tf) = id_E - \frac{t}{1+t}f.$$

**Exercice 3** (1+1+0.5+1.5+1+1pts). On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Résoudre  $M \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$  et en déduire une relation de dépendance linéaire entre les colonnes de  $M$ .

2. S'aider de cette relation pour calculer les racines du polynôme caractéristique de  $M$ , puis donner son polynôme minimal. [*Indice : Il faut trouver  $-3$  et une racine double strictement positive !*]
3. Donner la signature de la forme quadratique donnée par

$$Q(t, x, y, z) = t^2 + 4x^2 + 3y^2 + z^2 - 4tx + 6ty + 2tz - 4xz - 6yz$$

pour tout  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ .

4. Calculer une base orthonormée du plan de  $\mathbb{R}^4$  d'équations  $\begin{cases} t + x + z = 0 \\ t - y - z = 0 \end{cases}$ .
5. Calculer une base orthonormée de vecteurs propres de  $M$ .

6. En déduire des formes linéaires  $f_1, f_2, f_3$  sur  $\mathbb{R}^4$  telles que

$$Q(t, x, y, z) = -f_1(t, x, y, z)^2 + 2(f_2(t, x, y, z)^2 + f_3(t, x, y, z)^2)$$

pour tout  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ .

*Solution*

1. On trouve  $\ker M$  engendré par  $(1, 1, 0, 1)$ , et donc les colonnes  $(C_k)_{1 \leq k \leq 4}$  satisfont  $C_1 + C_2 + C_4 = 0$ .
2. Ceci suggère de calculer le polynôme caractéristique en commençant par ajouter  $C_1$  et  $C_2$  à  $C_4$ . Ensuite tout se passe bien et on aboutit à  $\chi_M = X(X + 3)(X - 6)^2$ . Comme  $M$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable et son polynôme minimal vaut  $X(X + 3)(X - 6)$ .
3. D'après ce qui précède la signature de la forme quadratique  $Q$  associée à  $M$  est  $(2, 1)$ .
4. Par exemple on trouve  $(1, -1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, -1)$ . Autre possibilité,  $(-1, 2, 0, -1)$ ,  $(1, 0, 2, -1)$ . Il faut éventuellement utiliser Gram-Schmidt.
5. On peut vérifier que le plan ci-dessus est l'espace propre de  $M$  associé à la valeur propre 6. Pour  $-3$  on trouve la droite engendrée par  $(1, 0, -1, -1)$ . On trouve donc par exemple comme matrice de passage

$$P = (1/\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Les  $f_i$  sont données par les 3 dernières coordonnées de la matrice ligne  $\sqrt{3}(t \ x \ y \ z)P$  :

$$Q(t, x, y, z) = -(t - y - z)^2 + 2((t - x + y)^2 + (x + y - z)^2).$$

Avec l'autre base,

$$Q(t, x, y, z) = -(t - y - z)^2 + (-t + 2x - z)^2 + (t + 2y - z)^2.$$

Par réduction de Gauss,

$$Q(t, x, y, z) = (t - 2x + 3y + z)^2 - 6(y - x + z)^2 + 6(x - z)^2.$$

**Exercice 4** (0.5+1.5+0.5+2+0.5+0.5+1+1pts). Soit  $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

pour toute paire de polynômes  $(P, Q)$ .

1. Montrer que  $\phi$  est bilinéaire et symétrique.
2. Montrer que  $\phi$  est définie positive.
3. Soit  $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'application définie par

$$u(P) = \frac{d}{dX}((1 - X^2)P')$$

pour tout polynôme  $P$ . Montrer que  $u$  est linéaire.

4. Montrer que  $u$  est symétrique vis-à-vis du produit scalaire  $\phi$ .
5. On fixe un entier  $n > 0$ . Montrer que  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $u$ . On note  $u_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$  l'endomorphisme induit.
6. Expliquer pourquoi  $u_n$  est diagonalisable.
7. Calculer  $u(X^k)$  pour tous  $0 \leq k \leq n$  et en déduire les valeurs propres de  $u_n$ .
8. Soit  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  une base propre pour  $u_n$ . Quelle est la valeur de

$$\int_{-1}^1 P_k(t)P_\ell(t)dt$$

pour toute paire d'entiers  $(k, \ell)$  telle que  $1 \leq k \neq \ell \leq n$  ?

*Solution*

1. La multiplication est bilinéaire symétrique, et l'intégration est linéaire.
2. On a  $\phi(P, P) \geq 0$  pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  et si  $\phi(P, P) = 0$ , comme la fonction  $t \mapsto P(t)^2$  est positive et continue sur  $[-1, 1]$  elle y est nulle, mais alors  $P$  a une infinité de racines et donc  $P = 0$ .
3. Dériver et multiplier par un polynôme donné sont des opérations linéaires.
4. Par double IPP,

$$\begin{aligned} \phi(u(P), Q) &= \underbrace{[(1-t^2)P'(t)Q(t)]_{-1}^1}_{=0} - \int_{-1}^1 (1-t^2)P'(t)Q'(t)dt \\ &= -\underbrace{[P(t)(1-t^2)Q'(t)]_{-1}^1}_{=0} + \int_{-1}^1 P(t) \frac{d}{dt}((1-t^2)Q'(t))dt \\ &= \phi(P, u(Q)). \end{aligned}$$

5. On a  $\deg u(P) = \deg(P) - 1 + 2 - 1 = \deg(P)$ .
6. Car  $u_n$  est symétrique réel.
7. On a  $u(1) = 0$ ,  $u(X) = -2X$  et pour  $k \geq 2$ ,  $u(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - k(k+1)X^k$ . Donc la matrice de  $u_n$  dans la base canonique est triangulaire supérieure stricte et son spectre se lit sur la diagonale :  $-k(k+1)$ ,  $0 \leq k \leq n$ .
8. Comme les valeurs propres sont simples la base propre est forcément orthogonale.

REMARQUE : si on impose la condition  $P_k(1) = 1$  on obtient les polynômes dits de *Legendre*, donnés par la formule explicite

$$L_k = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dX^k} [(X^2 - 1)^k].$$

En effet ces polynômes sont orthogonaux (par multiples IPPs), de degré  $k$ , et valent 1 en 1. Ceci implique que la matrice de passage de  $(P_k)$  à  $(L_k)$  est l'identité.

Algèbre linéaire et bilinéaire  
Contrôle du 13 Mars 2024 - 2h30

Documents et appareils électroniques interdits. Toute réponse doit être justifiée.  
LE BARÈME EST FINALEMENT SUR 28.

**Exercice 1** (7pts). Les trois questions qui suivent sont indépendantes.

- (A) Énoncer le théorème de décomposition de Dunford.
- (B) Soit  $u$  un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux valeurs propres distinctes de  $u$ , alors les espaces propres  $E_\lambda(u)$  et  $E_\mu(u)$  sont orthogonaux.
- (C) Donner une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  propre pour  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2** (8pts). Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes réels, et  $w$  la fonction définie sur  $] -1, 1[$  par  $w(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ .

- Montrer que pour tous  $P, Q \in E$  l'intégrale  $\int_{-1}^1 P(t)Q(t)w(t)dt$  converge.
- On admet que la forme  $\Psi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)w(t)dt$  est bilinéaire symétrique. Montrer qu'elle est définie positive.
- Montrer que pour tout  $P \in E$ , la fonction définie sur  $] -1, 1[$  par

$$t \mapsto w(t)^{-1} \frac{d}{dt} \left( w(t)^{-1} P'(t) \right)$$

est polynômiale, où  $d/dt$  désigne la dérivation usuelle par rapport à  $t$ .

On note cette fonction  $u(P)$ , définissant ainsi une application  $u : E \rightarrow E$  que l'on admet être linéaire.

- Montrer que  $u$  est symétrique pour le produit scalaire  $\Psi$ .
- Montrer que pour tout  $n \geq 0$  il existe un polynôme  $T_n \in E$  (dit de *Tchebychev*) tel que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  
$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)).$$
- Dériver deux fois l'expression ci-dessus et en déduire une équation différentielle linéaire (mais à coefficients non constants) d'ordre 2 satisfaite par  $T_n$ .
- Montrer que  $T_n$  est propre pour  $u$ .
- Donner la valeur de  $\int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)w(t)dt$  pour tous  $m \neq n \geq 0$ .

**Exercice 3** (13pts). Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n \times n$ , pour  $n \geq 1$ , et  $u$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $u(M) = {}^tM$ .

- On admet que la forme  $\Phi : (M, N) \mapsto \text{Tr}({}^tMN)$  est bilinéaire sur  $E$ . Montrer qu'elle est symétrique et définie positive.
- Montrer que  $u$  est symétrique vis à vis du produit scalaire  $\Phi$ .
- Calculer  $u^2$  et en déduire le polynôme minimal et le spectre de  $u$ .
- Décrire les espaces propres de  $u$ , et donner leur dimension. Quel est le polynôme caractéristique de  $u$ ?
- Donner une base orthonormale de chaque espace propre de  $u$ .
- Soient  $S$  une matrice symétrique et  $A$  une matrice antisymétrique (c'est-à-dire  ${}^tA = -A$ ). Donner la valeur de  $\Phi(S, A)$ .
- Donner la signature de la forme quadratique sur  $E$  définie par  $Q(M) = \text{Tr}(M^2)$ . Est-elle définie?
- Soit  $E_{ij}^*$  la base du dual  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  de  $E$  définie par  $E_{ij}^*(M) = M_{ij}$  = le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $M$ . Montrer que l'application bilinéaire  $\Phi^*$  sur  $E^*$  définie par  $\Phi^*(E_{ij}^*, E_{k\ell}^*) = \text{Tr}(E_{ji}E_{k\ell})$  est un produit scalaire.
- Décomposer  $Q$  en somme de carrés de formes linéaires indépendantes et orthogonales pour  $\Phi^*$ .

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°1 du 23 Octobre 2024 - 1h30**

- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- MERCI D'INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR LA COPIE!

**Exercice 1** (4 pts). Vrai ou Faux? Donner à chaque fois une brève explication.

1. La matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.
2. La décomposition de Dunford de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  est donnée par  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
3. Le polynôme minimal de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est égal à  $(X-1)(X-2)$ .
4. Le polynôme minimal de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est divisible par  $X^2$ .

**Exercice 2** (9 pts). Soient  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{k})$  et  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{k})$  définie par blocs par  $A = \begin{pmatrix} 0 & U \\ U & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $U^2$  puis  $A^2$  en fonction de  $U$ .
2. Calculer  $A^3$  en fonction de  $A$ .
3. En déduire un polynôme annulateur de  $A$ . Est-elle diagonalisable?
4. Donner le rang et la trace de  $A$ .
5. En déduire sans plus de calcul le polynôme caractéristique de  $A$ , et son polynôme minimal.

**Exercice 3** (11 pts). Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{k})$ . On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{k}^4$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_M$ .
2. Donner une base  $\mathcal{E}_1$  de  $E_1(M)$ .  $M$  est-elle diagonalisable?
3. Calculer  $(M - I_4)^2$  et en déduire le polynôme minimal  $\Pi_M$  de  $M$ .
4. Expliquer pourquoi  $E = \ker((M - I_4)^2) \oplus E_2(M)$ .
5. Compléter  $\mathcal{E}_1$  en une base  $\mathcal{E}$  adaptée à la décomposition ci-dessus.
6. On note  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $E$  à  $\mathcal{E}$ . Calculer son inverse.
7. Écrire la matrice  $P^{-1}MP$  comme la somme d'une matrice diagonale  $\Delta$  et d'une matrice triangulaire supérieure stricte  $T$  telles que  $T\Delta = \Delta T$ .
8. En déduire la décomposition de Dunford de  $M$ .

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°1 du 23 Octobre 2024 - 1h30**

- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- MERCI D'INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR LA COPIE!

**Exercice 1** (4 pts). Vrai ou Faux? Donner à chaque fois une brève explication.

1. La matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.

Faux, pour la valeur propre 2 la multiplicité est 2 dans le polynôme caractéristique alors que l'espace propre est de dimension 1.

2. La décomposition de Dunford de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  est donnée par  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Faux, les deux matrices de la décomposition ne commutent pas.

3. Le polynôme minimal de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est égal à  $(X-1)(X-2)$ .

Faux, la matrice n'est pas diagonalisable pour la même raison qu'en question 1, donc le polynôme minimal n'est pas simplement scindé.

4. Le polynôme minimal de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est divisible par  $X^2$ .

Faux, la matrice est de rang 1, donc son noyau est de dimension 2 et son polynôme caractéristique vaut  $X^2(X-\text{tr})$  avec  $\text{tr} = \text{trace} = 3$ . Donc la matrice est diagonalisable (pour toute valeur propre, multiplicité dans le polynôme caractéristique = dimension de l'espace propre) et le polynôme minimal est simplement scindé.

**Exercice 2** (1+1+2+2+3=9 pts). Soient  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{k})$  et  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{k})$  définie par blocs par  $A = \begin{pmatrix} 0 & U \\ U & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $U^2$  puis  $A^2$  en fonction de  $U$ .

$$U^2 = 2U \text{ donc } A^2 = 2 \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

2. Calculer  $A^3$  en fonction de  $A$ .

$$A^3 = 4A.$$

3. En déduire un polynôme annulateur de  $A$ . Est-elle diagonalisable?

$A$  est annihilée par  $X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$  qui est simplement scindé donc  $A$  est diagonalisable.

4. Donner le rang et la trace de  $A$ .

Le rang de  $A$  est 2, et sa trace 0.

5. En déduire sans plus de calcul le polynôme caractéristique de  $A$ , et son polynôme minimal.

On a  $\chi_A = X^2(X-a)(X-b)$  avec  $a, b \neq 0$  (la multiplicité de la valeur propre 0 est  $\dim \ker(A)$  car  $A$  est diagonalisable),  $a+b = \text{tr}(A) = 0$  et  $\{a, b\} \subseteq \{-2, 2\}$  (toute valeur propre est racine de tout polynôme annulateur). Donc nécessairement  $\{a, b\} = \{-2, 2\}$ ,  $\chi_A = X^2(X-2)(X+2)$  et le polynôme minimal est  $X(X-2)(X+2)$  (toutes les valeurs propres sont racines, avec multiplicité 1 car diagonalisable).

**Exercice 3** (1+1+2+1+2+1+1+2=11 pts). Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{k})$ . On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{k}^4$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_M$ .

On calcule  $\chi_M = (X-1)^3(X-2)$ .

2. Donner une base  $\mathcal{E}_1$  de  $E_1(M)$ .  $M$  est-elle diagonalisable?

On trouve  $\mathcal{E}_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ , donc  $\dim E_1(M) = 2 < 3$  et  $M$  n'est pas diagonalisable.

3. Calculer  $(M - I_4)^2$  et en déduire le polynôme minimal  $\Pi_M$  de  $M$ .

On a  $(M - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , puis on vérifie que  $(M - I_4)^2(M - 2I_4) = 0$ . Comme le polynôme minimal divise

$\chi_M$  et n'est pas simplement scindé, c'est donc  $(X-1)^2(X-2)$ . *Alternative* :  $\dim \ker(M - I_4)^2 = 3$  et la suite des dimensions des noyaux  $(\dim \ker(M - I_4)^k)_{k \geq 0}$  ne peut pas stagner à 4 puisque  $M - I_4$  n'est pas nilpotente. Donc l'indice de  $M - I_4$  est 2, qui donne la multiplicité dans le polynôme minimal.

4. Expliquer pourquoi  $E = \ker((M - I_4)^2) \oplus E_2(M)$ .

Lemme des noyaux appliqué à  $\Pi_M$ .

5. Compléter  $\mathcal{E}_1$  en une base  $\mathcal{E}$  adaptée à la décomposition ci-dessus.

Vu le calcul de  $(M - I_4)^2$ , une base de  $\ker((M - I_4)^2)$  est donnée par  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . On complète alors par

un vecteur propre pour 2, par exemple  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  convient puisque  $\text{im}(M - I_4)^2 \subseteq \ker(M - 2I_4)$  (en fait égalité car de dimension 1). On pose donc

$$\mathcal{E} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

6. On note  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $E$  à  $\mathcal{E}$ . Calculer son inverse.

On trouve  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

7. Écrire la matrice  $P^{-1}MP$  comme la somme d'une matrice diagonale  $\Delta$  et d'une matrice triangulaire supérieure stricte  $T$  telles que  $T\Delta = \Delta T$ .

On trouve  $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_T$  et on voit par blocs que  $\Delta T = T\Delta$ .

8. En déduire la décomposition de Dunford de  $M$ .

Elle est donc donnée par  $M = P\Delta P^{-1} + PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°2 du 18 Décembre 2024 - 2h30**

- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- MERCI D'INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR LA COPIE!

**Exercice 1** (2 pts). On considère l'espace euclidien  $E = \mathbb{R}^2$  muni de sa norme usuelle  $\| \cdot \|$ . Soit  $Q$  la forme quadratique définie par  $Q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$ . Calculer le plus petit réel  $C > 0$  et le plus grand réel  $c > 0$  tels que

$$\forall v \in E, \quad c\|v\| \leq \sqrt{Q(v)} \leq C\|v\|.$$

**Exercice 2** (3 pts). Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euclidien de dimension  $n$ , de norme associée  $\| \cdot \|$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  symétrique et  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres.

1. Montrer que pour tout  $x \in E$  on a

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

2. Soit  $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ . Montrer que

$$\|u\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

**Exercice 3** (2 pts). Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère  $\mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(0)Q^{(j)}(0)}{j!^2}.$$

1. Calculer  $\langle X^k, P \rangle$  pour tous  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .
2. Donner une base orthonormée.

**Exercice 4** (3 pts). Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Pour toute famille de vecteurs  $(x_1, \dots, x_m)$  de  $E$  on introduit le *déterminant de Gram* :

$$G(x_1, \dots, x_m) = \det(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}.$$

1. Montrer que  $G(x_1, \dots, x_m) = 0$  pour toute famille  $(x_1, \dots, x_m)$  liée de  $E$ .
2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $p$  la projection orthogonale sur  $F$  : pour tout  $x = y + z \in F \oplus F^\perp$ ,  $p(x) = y$ . Soit  $d = \|z\| = \|x - p(x)\|$  la distance de  $x$  à  $F$ . Soit  $(f_1, \dots, f_r)$  une base de  $F$ . Montrer en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne que

$$G(x, f_1, \dots, f_r) = d^2 G(f_1, \dots, f_r).$$

**Exercice 5** (12 pts). Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  l'application bilinéaire symétrique définie par

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$$

pour toute paire de polynômes  $(P, Q)$ .

1. Expliquer pourquoi cette intégrale est toujours définie.

2. Expliquer brièvement pourquoi  $\langle -, - \rangle$  est définie positive.
3. Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto e^x \frac{d}{dx} (xP'(x)e^{-x})$$

est polynomiale. On note  $u(P)$  le polynôme associé. Montrer que l'application  $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  ainsi définie est linéaire, et symétrique vis-à-vis du produit scalaire  $\langle -, - \rangle$ .

4. On fixe un entier  $n > 0$ . Montrer que  $E = \mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $u$ . On note  $u_n \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme induit.
5. Expliquer pourquoi  $u_n$  est diagonalisable.
6. Calculer  $u_n(X^k)$  pour tous  $0 \leq k \leq n$  et en déduire les valeurs propres de  $u_n$ .
7. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  on pose

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

- (a) Calculer explicitement  $L_0$  et  $L_1$ .
- (b) En utilisant la formule de Leibniz rappelée ci-dessous, montrer que  $L_n$  définit un polynôme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donner son degré et son coefficient dominant.
- (c) Montrer en utilisant à nouveau la formule de Leibniz que pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$x(h_n^{(n)}(x) + h_n^{(n+1)}(x)) = -nh_n^{(n-1)}(x).$$

- (d) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u(L_n) = -nL_n$ .
- (e) Montrer que  $\int_0^{+\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = 0$  si  $n \neq m$ .

**i** Il s'agit des polynômes de *Laguerre*.

FORMULE DE LEIBNIZ : Soient  $f$  et  $g$  des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$ . On note  $f^{(k)}$  et  $g^{(k)}$  leurs dérivées  $k$ -ièmes. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{0 \leq p \leq n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p)}.$$

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°2 du 18 Décembre 2024 - 2h30**

- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- MERCI D'INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR LA COPIE!

**Exercice 1** (2 pts). On considère l'espace euclidien  $E = \mathbb{R}^2$  muni de sa norme usuelle  $\| \cdot \|$ . Soit  $Q$  la forme quadratique définie par  $Q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$ . Calculer le plus petit réel  $C > 0$  et le plus grand réel  $c > 0$  tels que

$$\forall v \in E, \quad c\|v\| \leq \sqrt{Q(v)} \leq C\|v\|.$$

*Solution* : le polynôme caractéristique de la matrice symétrique associée  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  est  $X^2 - 4X + 3 = (X-3)(X-1)$  donc  $c = 1$  et  $C = \sqrt{3}$ .

**Exercice 2** (1+2=3 pts). Soit  $(E, \langle -, - \rangle)$  euclidien de dimension  $n$ , de norme associée  $\| \cdot \|$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  symétrique et  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres.

1. Montrer que pour tout  $x \in E$  on a

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

2. Soit  $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ . Montrer que

$$\|u\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

*Solution* : soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de diagonalisation de  $u$ . Alors pour tout  $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i$ ,

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i^2$$

d'où le résultat vu que  $\|x\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2$ . Pour la 2. on utilise

$$\langle u(x), u(x) \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right)^2 \|x\|^2$$

avec égalité si  $x$  est propre pour la valeur propre maximisant la valeur absolue.

**Exercice 3** (1+1=2 pts). Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère  $\mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(0)Q^{(j)}(0)}{j!^2}.$$

1. Calculer  $\langle X^k, P \rangle$  pour tous  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .
2. Donner une base orthonormée.

*Solution* : on a  $\langle X^k, P \rangle = P^{(k)}(0)/k!$  donc la base canonique est orthonormée.

**Exercice 4** (1+2=3 pts). Soit  $(E, \langle -, - \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Pour toute famille de vecteurs  $(x_1, \dots, x_m)$  de  $E$  on introduit le *déterminant de Gram* :

$$G(x_1, \dots, x_m) = \det(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}.$$

1. Montrer que  $G(x_1, \dots, x_m) = 0$  pour toute famille  $(x_1, \dots, x_m)$  liée de  $E$ .
2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $p$  la projection orthogonale sur  $F$  : pour tout  $x = y + z \in F \oplus F^\perp$ ,  $p(x) = y$ . Soit  $d = \|z\| = \|x - p(x)\|$  la distance de  $x$  à  $F$ . Soit  $(f_1, \dots, f_r)$  une base de  $F$ . Montrer en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne que

$$G(x, f_1, \dots, f_r) = d^2 G(f_1, \dots, f_r).$$

*Solution* : si  $\sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_j x_j = 0$  a fortiori pour tout  $1 \leq i \leq m$  on a  $\sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle = 0$  d'où le résultat. Pour la 2. on a

$$G(x, f_1, \dots, f_r) = \begin{pmatrix} \|y\|^2 + \|z\|^2 & \langle y, f_1 \rangle & \dots & \langle y, f_r \rangle \\ \langle y, f_1 \rangle & \langle f_1, f_1 \rangle & \dots & \langle f_1, f_r \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle y, f_r \rangle & \langle f_r, f_1 \rangle & \dots & \langle f_r, f_r \rangle \end{pmatrix} = \underbrace{G(y, f_1, \dots, f_r)}_{=0 \text{ par 1.}} + \|z\|^2 G(f_1, \dots, f_r).$$

**Exercice 5** (1+1+1+1+1+1+1+2+1+1=12 pts). Soit  $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  l'application bilinéaire symétrique définie par

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$$

pour toute paire de polynômes  $(P, Q)$ .

1. Expliquer pourquoi cette intégrale est toujours définie.
2. Expliquer brièvement pourquoi  $\langle -, - \rangle$  est définie positive.
3. Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto e^x \frac{d}{dx} (xP'(x)e^{-x})$$

est polynomiale. On note  $u(P)$  le polynôme associé. Montrer que l'application  $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  ainsi définie est linéaire, et symétrique vis-à-vis du produit scalaire  $\langle -, - \rangle$ .

4. On fixe un entier  $n > 0$ . Montrer que  $E = \mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $u$ . On note  $u_n \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme induit.
5. Expliquer pourquoi  $u_n$  est diagonalisable.
6. Calculer  $u_n(X^k)$  pour tous  $0 \leq k \leq n$  et en déduire les valeurs propres de  $u_n$ .
7. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  on pose

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

- (a) Calculer explicitement  $L_0$  et  $L_1$ .
- (b) En utilisant la formule de Leibniz rappelée ci-dessous, montrer que  $L_n$  définit un polynôme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donner son degré et son coefficient dominant.
- (c) Montrer en utilisant à nouveau la formule de Leibniz que pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$x(h_n^{(n)}(x) + h_n^{(n+1)}(x)) = -nh_n^{(n-1)}(x).$$

- (d) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u(L_n) = -nL_n$ .
- (e) Montrer que  $\int_0^{+\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = 0$  si  $n \neq m$ .

**i** Il s'agit des polynômes de Laguerre.

*Solution* : Pour 6. on remarque (conséquence de 4.) que la matrice dans la base canonique est triangulaire, le spectre se lit donc sur la diagonale :  $\{0, -1, \dots, -n\}$ . Pour 7b on a

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \frac{1}{(n-k)!} (-x)^{n-k}$$

de degré  $n$  et coefficient dominant  $(-1)^n$ . Pour 7c on a aussi

$$h_n^{(n+1)}(x) = - \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+1}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-x)^{n-k} e^{-x}$$

vu que  $(x^n)^{(n+1)} = 0$ . Ainsi par le triangle de Pascal

$$\begin{aligned} x(h_n^{(n)}(x) + h_n^{(n+1)}(x)) &= \sum_{1 \leq k \leq n} \binom{n}{k-1} \frac{n!}{(n-k)!} (-x)^{n-(k-1)} e^{-x} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n-1} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k-1)!} (-x)^{n-k} e^{-x} \\ &= n \sum_{0 \leq k \leq n-1} \binom{n-1}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-x)^{n-k} e^{-x} = -n h_n^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Pour 7d on a

$$u(L_n)(x) = e^x \frac{d}{dx} (xL_n(x)' e^{-x}) = \frac{e^x}{n!} \frac{d}{dx} (x(h_n^{(n)}(x) + h_n^{(n+1)}(x))) = -\frac{e^x}{(n-1)!} h_n^{(n)}(x) = -nL_n(x).$$

Les  $L_n$  sont des polynômes propres pour des valeurs distinctes, et sont donc orthogonaux!

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle du 5 Mars 2025 - 2h30**

- Documents et appareils électroniques interdits.
- Toute réponse doit être justifiée.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- MERCI D'INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR LA COPIE !

**Exercice 1** (2 pts). Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de produit scalaire noté  $\langle -, - \rangle$ , et  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux valeurs propres distinctes de  $u$ . Montrer que les espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont orthogonaux.

**Exercice 2** (2 pts). Soit  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $Q$  la forme quadratique de  $\mathbb{R}^2$  associée. Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse? Donner à chaque fois une brève explication.

1. La signature de  $Q$  est  $(1, 1)$ .
2. La forme  $Q$  est non-dégénérée.
3. La forme  $Q$  est définie positive.
4. La forme  $Q$  est définie.

**Exercice 3** (6 pts). On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^2 P(t)Q(t) dt.$$

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par

$$P \mapsto u(P) = \frac{d}{dX} (X(X-2)P').$$

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Pour tous entiers  $i, j \geq 0$ , calculer  $\langle X^i, X^j \rangle$ .
3. Calculer une base orthogonale  $\mathcal{E} = (P_0, P_1, P_2)$  de  $E := \mathbb{R}[X]_2$ , l'espace des polynômes de degré  $\leq 2$ , en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à sa base canonique  $(1, X, X^2)$ .  
*Remarque* : on ne demande pas que  $P_0, P_1, P_2$  soient de norme 1!
4. Montrer que  $\mathcal{E}$  est constituée de vecteurs propres pour  $u$ .

**Exercice 4** (10 pts). Soit  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$  des matrices colonnes, muni de sa base canonique

$$\mathcal{B} = \left( b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_M$ .
2. Donner une base de  $E_1(M)$ .
3. Soit  $\bar{M} = M - 2I_4$ . Donner le rang de  $\bar{M}$ .
4.  $M$  est-elle diagonalisable?
5. Donner la forme de Jordan de  $M$ .
6. En déduire le polynôme minimal  $\mu_M$ .
7. Calculer  $\bar{M}^3$ .
8. Donner le vecteur  $b$  de la base canonique qui est dans  $\ker(\bar{M}^3)$  mais *pas* dans  $E_1(M) + \ker(\bar{M}^2)$ .
9. Expliquer pourquoi  $\ker(\bar{M}^3) \cap E_1(M) = \{0\}$ .
10. Montrer que  $\mathcal{E} := (\bar{M}^2 b, \bar{M}b, b, b_3)$  est une base de  $E$ .
11. Donner la matrice  $P$  de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{E}$ .
12. Calculer son inverse.
13. Donner la matrice  $P^{-1}MP$ .

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle du 5 Mars 2025 - Solution**

**Exercice 1** (2 pts). Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de produit scalaire noté  $\langle -, - \rangle$ , et  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux valeurs propres distinctes de  $u$ . Montrer que les espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont orthogonaux.

**Exercice 2** (2 pts). Soit  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $Q$  la forme quadratique de  $\mathbb{R}^2$  associée. Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse? Donner à chaque fois une brève explication.

1. La signature de  $Q$  est  $(1, 1)$ .
2. La forme  $Q$  est non-dégénérée.
3. La forme  $Q$  est définie positive.
4. La forme  $Q$  est définie.

**Exercice 3** (1+1+2+2=6 pts). On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^2 P(t)Q(t) dt.$$

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par

$$P \mapsto u(P) = \frac{d}{dX} (X(X-2)P').$$

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Pour tous entiers  $i, j \geq 0$ , calculer  $\langle X^i, X^j \rangle$ .
3. Calculer une base orthogonale  $\mathcal{E} = (P_0, P_1, P_2)$  de  $E := \mathbb{R}[X]_2$ , l'espace des polynômes de degré  $\leq 2$ , en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à sa base canonique  $(1, X, X^2)$ .  
*Remarque* : on ne demande pas que  $P_0, P_1, P_2$  soient de norme 1!
4. Montrer que  $\mathcal{E}$  est constituée de vecteurs propres pour  $u$ .

Solution :  $P_0 // 1, P_1 // X - 1, P_2 // 3X^2 - 6X + 2$ .

**Exercice 4** (.5+.5+.5+.5+1+2+.5+.5+1+1+.5+.5+1=10 pts). Soit  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$  des matrices colonnes, muni de sa base canonique

$$\mathcal{B} = \left( b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_M$ .
2. Donner une base de  $E_1(M)$ .
3. Soit  $\bar{M} = M - 2I_4$ . Donner le rang de  $\bar{M}$ .

4.  $M$  est-elle diagonalisable?
5. Donner la forme de Jordan de  $M$ .
6. En déduire le polynôme minimal  $\mu_M$ .
7. Calculer  $\overline{M}^3$ .
8. Donner le vecteur  $b$  de la base canonique qui est dans  $\ker(\overline{M}^3)$  mais *pas* dans  $E_1(M) + \ker(\overline{M}^2)$ .
9. Expliquer pourquoi  $\ker(\overline{M}^3) \cap E_1(M) = \{0\}$ .
10. Montrer que  $\mathcal{E} := (\overline{M}^2 b, \overline{M} b, b, b_3)$  est une base de  $E$ .
11. Donner la matrice  $P$  de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{E}$ .
12. Calculer son inverse.
13. Donner la matrice  $P^{-1}MP$ .

Solution :  $E_1(M) = \mathbb{R}.b_3, b = b_2$ .

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°1 du 22 Octobre 2025 - 1h30**

- Documents et appareils électroniques interdits.
- Les questions marquées du symbole peuvent être traitées indépendamment.
- MERCI D'INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR LA COPIE!

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$  on note  $M_t = \begin{pmatrix} t^2 & t & 0 \\ 0 & t^2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Donner le polynôme caractéristique  $\chi_t \in \mathbb{R}[X]$  de  $M_t$ .
2. La matrice  $M_t$  est-elle diagonalisable? Donner son polynôme minimal  $\mu_t$ .
3. Décomposer  $E = \mathbb{R}^3$  en appliquant le lemme des noyaux à  $\chi_t$ .
4. Donner une base de  $\ker((M_t - t^2 I_3)^2)$ , ainsi qu'une base de  $\ker(M_t)$ .
5. Soit  $P_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$ . Calculer son inverse, puis donner la décomposition de Dunford de  $T_t := P_t^{-1} M_t P_t$ .
6. En déduire la décomposition de Dunford de  $M_t$ . On notera  $D_t$  sa partie diagonalisable et  $N_t$  sa partie nilpotente.
7. Soit  $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'application (non linéaire!) qui à une matrice associe la partie nilpotente de sa décomposition de Dunford. La fonction  $f$  est-elle continue en 0?

8. Soient  $D_t = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & -1 \\ 0 & t^2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $n \in \mathbb{N}_{n \geq 1}$ .

- (a) Donner le polynôme minimal de  $D_t$ .
- (b) En déduire  $D_t^n$ .
- (c) Calculer  $M_t^n$ .

9. Soit  $T = T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calculer  $T^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} T^k \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Montrer que pour toute paire d'indices  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ , la suite  $((S_n)_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite notée  $S_{i,j}$  que l'on calculera. On note  $S = \exp(tT)$  la matrice formée par ces limites.

(c) Résoudre le système différentiel  $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases}$  avec condition initiale  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(d) Vérifier que  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(tT) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°1 du 22 Octobre 2025 - 1h30**

- Documents et appareils électroniques interdits.
- Les questions marquées du symbole peuvent être traitées indépendamment.
- MERCI D'INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR LA COPIE!

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$  on note  $M_t = \begin{pmatrix} t^2 & t & 0 \\ 0 & t^2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Donner le polynôme caractéristique  $\chi_t \in \mathbb{R}[X]$  de  $M_t$ . [1pt]

$$\chi_t = X(X - t^2)^2$$

2. La matrice  $M_t$  est-elle diagonalisable? Donner son polynôme minimal  $\mu_t$ . [2pt]

$M_t - t^2 I_3$  est de rang 2 donc  $\dim E_{t^2}(M_t) = 1$  et  $M_t$  n'est pas diagonalisable. Donc  $\mu_t = \chi_t$ .

3. Décomposer  $E = \mathbb{R}^3$  en appliquant le lemme des noyaux à  $\chi_t$ . [1pt]

$$E = \ker(M_t) \oplus \ker((M_t - t^2 I_3)^2).$$

4. Donner une base de  $\ker((M_t - t^2 I_3)^2)$ , ainsi qu'une base de  $\ker(M_t)$ . [3pt]

$(e_1, e_2)$  et  $e_1 - t e_2 + t^2 e_3$  où  $(e_1, e_2, e_3)$  désigne la base canonique.

5. Soit  $P_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$ . Calculer son inverse, puis donner la décomposition de Dunford de  $T_t := P_t^{-1} M_t P_t$ .

[2pt]

$$P_t^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t^{-2} \\ 0 & 1 & t^{-1} \\ 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix} \text{ puis } T_t = \begin{pmatrix} t^2 & t & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. En déduire la décomposition de Dunford de  $M_t$ . On notera  $D_t$  sa partie diagonalisable et  $N_t$  sa partie nilpotente. [3 pt]

$$D_t = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & -1 \\ 0 & t^2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Soit  $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'application (non linéaire!) qui à une matrice associe la partie nilpotente de sa décomposition de Dunford. La fonction  $f$  est-elle continue en 0? [1pt]

Non car  $N_t$  ne tend pas vers 0 quand  $t \rightarrow 0$ .

8. Soient  $D_t = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & -1 \\ 0 & t^2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $n \in \mathbb{N}_{n \geq 1}$ .

- (a) Donner le polynôme minimal de  $D_t$ . [1pt]

$$\mu_{D_t} = X(X - t^2).$$

- (b) En déduire  $D_t^n$ . [1pt]

$$D_t^n = t^{2n} D_t \text{ donc par récurrence } D_t^n = t^{2n-2} D_t = \begin{pmatrix} t^{2n} & 0 & -t^{2n-2} \\ 0 & t^{2n} & t^{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Calculer  $M_t^n$ . [3pt]

$$\text{Par la formule du binôme et puisque } N_t^2 = 0 \text{ on a } M_t^n = D_t^n + n N_t D_t^{n-1} = \begin{pmatrix} t^{2n} & n t^{2n-1} & (n-1) t^{2n-2} \\ 0 & t^{2n} & t^{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. ♻️ Soit  $T = T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer  $T^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . [1pt]

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } n \geq 1.$$

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} T^k \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Montrer que pour toute paire d'indices  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ , la suite  $((S_n)_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite notée  $S_{i,j}$  que l'on calculera. On note  $S = \exp(tT)$  la matrice formée par ces limites. [3pt]

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ♻️ Résoudre le système différentiel  $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases}$  avec condition initiale  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . [3pt]

$z = 0$ ,  $y(t) = e^t$  et par variation de la constante  $x(t) = te^t$ .

(d) Vérifier que  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(tT) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . [1pt]

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°2 du 17 Décembre 2025 - 2h30**

- Documents et appareils électroniques interdits.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- MERCI D'INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR LA COPIE!

**Exercice 1** (7 pts). Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ .
2. Calculer le polynôme minimal  $\mu_A \in \mathbb{R}[X]$ .
3. Donner le nombre de blocs de Jordan ainsi que leur taille dans la décomposition de Jordan de  $A$ .
4. Donner une matrice  $P$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale par blocs de Jordan.

**Exercice 2** (6 pts). Soit  $Q$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$  définie par  $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xz$ .

1. Effectuer sa réduction de Gauss et donner sa signature.
2. Donner la matrice symétrique réelle  $M$  associée à  $Q$ . Trouver une matrice orthogonale  $P$  telle que  ${}^tPMP$  est une matrice diagonale  $D$ .
3. En déduire une nouvelle décomposition de  $Q$  en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.  
Indice : écrire  $Q(x, y, z)$  en fonction de  $D$  et  $Y = {}^tPX$ .

**Exercice 3** (3 pts). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive : on suppose que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

1. Montrer que  $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$  définit un produit scalaire sur  $E := \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , que l'on note  $\langle -, - \rangle_A$ .
2. Montrer qu'une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est auto-adjointe (c'est-à-dire symétrique) pour ce produit scalaire  $\langle -, - \rangle_A$  si et seulement si  $AB = {}^tBA$ .
3. Montrer que si on suppose  $AB = {}^tBA$ , alors il existe une matrice inversible  $P$  telle que  ${}^tPAP = I_n$  et  $P^{-1}BP$  diagonale.

**Exercice 4** (10 pts). Soient  $\beta \in ]0, 1[$ , ainsi que  $q = X(X - 1)$  et  $\ell = X - \beta$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

1. Calculer  $a$  et  $c$  dans la décomposition en éléments simples

$$\frac{\ell}{q} = \frac{a}{X} + \frac{c}{X-1}.$$

2. Soit  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $w(t) = t^{\beta-1}(1-t)^{-\beta}$ . Montrer que la forme bilinéaire symétrique

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)w(t)dt$$

est définie positive sur  $\mathbb{R}[X]$ . On justifiera aussi la convergence de l'intégrale.

3. Montrer que pour tout  $t \in I$ ,  $(qw)'(t) = \ell w(t)$ .
4. Montrer que l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par  $u(P) = qP'' + \ell P'$  est symétrique.  
Indice : écrire  $wu(P)$  comme une dérivée.
5. Montrer que le sous espace  $E = \mathbb{R}[X]_2$ , est stable par  $u$ . On note  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E$ .
6. Donner la matrice de  $\tilde{u}$  dans la base  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  et en déduire les valeurs propres de  $\tilde{u}$ .
7. Trouver une base propre pour  $\tilde{u}$  sur  $E$ .
8. Donner la valeur de  $\langle 1, \ell \rangle$ .

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Continu n°2 du 17 Décembre 2025 - Solution**

**Exercice 1.** [7pt] Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ . [1pt]

$$\chi_A = (X - 2)^4.$$

2. Calculer le polynôme minimal  $\mu_A \in \mathbb{R}[X]$ . [1pt]

$$\mu_A = (X - 2)^2.$$

3. Donner le nombre de blocs de Jordan ainsi que leur taille dans la décomposition de Jordan de  $A$ . [2pt]

Le rang de  $A - 2I_4$  est 2 donc il y a 2 blocs. Le carré de  $A - 2I_4$  est nul donc les deux blocs sont de taille 2.

4. Donner une matrice  $P$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale par blocs de Jordan. [3pt]

On a  $\text{ima}(A - 2I_4) = \ker(A - 2I_4)$  donc pour tout choix de deux vecteurs non colinéaires  $(v, w)$  en dehors de  $\ker(A - 2I_4)$ , on a une base de Jordan  $((A - 2I_4)v, v, (A - 2I_4)w, w)$ . Par exemple en prenant les 2 premiers vecteurs

de la base canonique on obtient  $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2.** [6pt] Soit  $Q$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$  définie par  $Q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xz$ .

1. Effectuer sa réduction de Gauss et donner sa signature. [1pt]

$$Q(x, y, z) = (x + 3z)^2 + 4y^2 - 8z^2.$$

2. Donner la matrice symétrique réelle  $M$  associée à  $Q$ . Trouver une matrice orthogonale  $P$  telle que  ${}^tPMP$  est une matrice diagonale  $D$ . [3pt]

On a  $\chi_M = -(X + 2)(X - 4)^2$ , et  $(1, 0, -1)$  propre pour  $-2$ . Aussi,  $E_4 = \{x = z\}$ . De là, soit on remarque que  $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$  en forme une base orthogonale, soit on en choisit une pas orthogonale et on lui applique Gram-Schmidt, soit on y prend un vecteur et on forme le produit vectoriel avec  $(1, 0, -1)$ . En tout cas en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ on a } {}^tPMP = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire une nouvelle décomposition de  $Q$  en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. [2pt]

$$Q(x, y, z) = {}^t(PX)D({}^tPX) = -(x - z)^2 + 2(x + z)^2 + 4y^2.$$

**Exercice 3.** [3pt] Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive : on suppose que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

1. Montrer que  $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$  définit un produit scalaire sur  $E := \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . [1pt]

Pour montrer que la forme quadratique associée est définie positive : soit  $P$  orthogonale telle que  ${}^tPAP = D$  est diagonale avec entrées  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ . Soit  $Y = {}^tPX$ . On a  ${}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$  et on conclut. *Alternative* : soit  $(B_1, \dots, B_n)$  base orthogonale et propre pour  $A$  avec  $AB_i = \lambda_i B_i$ . Si  $X = \sum_{i=1}^n x_i B_i$  on a

$${}^tXAX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j {}^t B_i A B_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_j x_i x_j {}^t B_i B_j = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j x_j^2.$$

2. Montrer qu'une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est auto-adjointe (c'est-à-dire symétrique) pour ce produit scalaire  $\langle -, - \rangle_A$  si et seulement si  $AB = {}^tBA$ . [1pt]

Pour tous  $X, Y \in E$  on a  $\langle X, BY \rangle_A = {}^tXABY$  et  $\langle BX, Y \rangle_A = {}^tX{}^tBAY$ . Par non dégénérescence du produit scalaire usuel on obtient le résultat souhaité.

3. Montrer si on suppose  $AB = {}^tBA$ , alors il existe une matrice inversible  $P$  telle que  ${}^tPAP = I_n$  et  $P^{-1}BP$  diagonale. [1pt]

C'est le théorème spectral une fois qu'on a remarqué qu'une matrice  $P$  est orthogonale pour le produit scalaire induit par  $A$  si et seulement si  ${}^tPAP = I_n$ .

**Exercice 4.** [10pt] Soient  $\beta \in I := ]0, 1[$ , ainsi que  $q = X(X-1)$  et  $\ell = X - \beta$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

1. Calculer  $a$  et  $c$  dans la décomposition en éléments simples [1pt]

$$\frac{\ell}{q} = \frac{a}{X} + \frac{c}{X-1}.$$

$a = \beta$  et  $c = 1 - \beta$ .

2. Soit  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $w(t) = t^{\beta-1}(1-t)^{-\beta}$ . Montrer que la forme bilinéaire symétrique

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)w(t)dt$$

est définie positive sur  $\mathbb{R}[X]$ . On justifiera aussi la convergence de l'intégrale. [1pt]

Il faut noter que l'intégrale converge car  $\beta - 1, -\beta > -1$ .

3. Montrer que  $(qw)' = \ell w$ . [1pt]

$$(qw)'(t) = (-t^\beta(1-t)^{1-\beta})' = -(\beta(1-t) - (1-\beta)t)w(t) = \ell(t)w(t).$$

4. Montrer que l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par  $u(P) = qP'' + \ell P'$  est symétrique. [2pt]

On a  $u(P) = w^{-1}(P'qw)'$  puis

$$\langle u(P), Q \rangle = \int_I (P'qw)' Q = \underbrace{[P'qwQ]_0^1}_{=0} - \int_I P'qwQ' = \langle u(Q), P \rangle.$$

5. Montrer que le sous espace  $E = \mathbb{R}[X]_2$ , est stable par  $u$ . On note  $\bar{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E$ . [1pt]

Par inspection des degrés.

6. Donner la matrice de  $\bar{u}$  dans la base  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  et en déduire les valeurs propres de  $\bar{u}$ . [1pt]

$$\text{On a } u(X^2) = 2q + 2X\ell = 4X^2 - 2(1+\beta)X \text{ donc } [\bar{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & -2(1+\beta) \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ est triangulaire supérieure et on lit}$$

le spectre sur la diagonale.

7. Trouver une base propre pour  $\bar{u}$  sur  $E$ . [2pt]

$$\text{On peut choisir } \left(1, \ell, X^2 - \frac{1+\beta}{3}(2X - \frac{\beta}{2})\right).$$

8. Donner la valeur de  $\langle 1, \ell \rangle$ . [1pt]

0 car la base propre est orthogonale.

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Terminal du 4 Mars 2026 - 2h30**

- Documents et appareils électroniques interdits.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- MERCI D'INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR LA COPIE!

**Exercice 1** (4 pts). Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $Q$  une forme quadratique définie positive sur  $E$ .

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que la restriction  $Q|_F : F \rightarrow \mathbb{R}$  de  $Q$  à  $F$  est toujours définie positive.
2. Soient  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice de  $Q$  dans  $\mathcal{E}$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ . Décrire la matrice de  $Q|_F$  dans la base  $(e_1, \dots, e_k)$  en fonction de  $M$ .
3. Soit  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée inversible de taille  $n$ . Montrer que la forme bilinéaire associée à la matrice  ${}^t V V$  est définie positive.

**Exercice 2** (9 pts). Soit  $n$  un entier strictement positif et  $(a_0, \dots, a_n)$  une famille de  $n + 1$  réels distincts. On note  $E = \mathbb{R}[X]_n$ . Pour tout  $j \in \mathbb{N}$  on note  $\mu_j = \sum_{0 \leq t \leq n} a_t^j$  puis

$$D_k = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} & \mu_k \\ \mu_1 & & \ddots & \ddots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{k-1} & \ddots & \ddots & & \mu_{2k-1} \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \cdots & \mu_{2k-1} & \mu_{2k} \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = \det(D_k)$$

pour tout  $0 \leq k \leq n$ .

1. Soit

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

la matrice de Vandermonde associée à  $(a_0, \dots, a_n)$ , que l'on rappelle inversible. Calculer  ${}^t V V$  et déduire de l'Exercice 1 que le réel  $\Delta_k$  est différent de 0 pour tout  $0 \leq k \leq n$ .

2. Soit

$$P_k = \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} & \mu_k \\ \mu_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \cdots & \mu_{2k-1} \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^k \end{pmatrix}$$

pour tous  $0 \leq k \leq n$ , avec la convention  $P_0 = 1$ . Montrer que  $P_k$  définit un polynôme de degré  $k$ . Donner son coefficient dominant en fonction des données précédentes (un déterminant qu'on ne calculera pas).

3. On définit une forme bilinéaire symétrique  $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{0 \leq k \leq n} P(a_k) Q(a_k)$$

pour tous  $P, Q \in E$ . Montrer qu'elle est définie positive sur  $E$ .

4. Montrer que pour tout  $0 \leq \ell < k \leq n$  on a  $\langle P_k, X^\ell \rangle = 0$ .
5. En déduire que  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  définit une base orthogonale échelonnée de  $E$ .

6. Montrer que  $\|P_k\|^2 = \Delta_{k-1}\Delta_k$  pour tous  $1 \leq k \leq n$ .
7. Soient  $P, Q$  deux polynômes de degrés  $\leq n-1$ . Montrer que  $\langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle$ .
8. Soit  $\bar{P}_k = P_k/\Delta_{k-1}$  pour tous  $1 \leq k \leq n$ . Montrer que pour tous  $0 \leq \ell < k-1 < n-1$  on a

$$\langle X\bar{P}_k - \bar{P}_{k+1}, P_\ell \rangle = 0.$$

9. D'après ce qui précède, pour tous  $1 \leq k \leq n-1$ , il existe donc des réels  $b_k, c_k$  tels que

$$X\bar{P}_k = b_k\bar{P}_{k-1} + c_k\bar{P}_k + \bar{P}_{k+1}.$$

Montrer que  $b_k = \|\bar{P}_k\|^2 / \|\bar{P}_{k-1}\|^2$ .

**Exercice 3** (5 pts). Trigonaliser la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On donnera la matrice de passage.

**Exercice 4** (5 pts). Soit  $n > 0, p > 0$  des entiers. Pour  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on pose

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB),$$

où  $\text{Tr}$  est la trace.

1. Montrer que  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \langle -, - \rangle)$  est un espace euclidien.
2. Notons  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'espace des matrices symétriques réelles carrées de taille  $n \times n$ . Montrer que si  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  alors

$$\text{Tr}(AB)^2 \leq \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2).$$

3. On suppose désormais que  $n = p = 2$  et on considère

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que  $(A_1, A_2, A_3)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (b) En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt, trouver une famille  $(B_1, B_2, B_3)$  orthogonale pour  $\langle -, - \rangle$  telle que

$$\text{Vect}(B_1, B_2, B_3) = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3).$$

**Algèbre linéaire et bilinéaire**  
**Contrôle Terminal du 4 Mars 2026 - Solution**

**Exercice 1** (4 pts). Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $Q$  une forme quadratique définie positive sur  $E$ .

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que la restriction  $Q|_F : F \rightarrow \mathbb{R}$  de  $Q$  à  $F$  est toujours définie positive.
2. Soient  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice de  $Q$  dans  $\mathcal{E}$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ . Décrire la matrice de  $Q|_F$  dans la base  $(e_1, \dots, e_k)$  en fonction de  $M$ .
3. Soit  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée inversible de taille  $n$ . Montrer que la forme bilinéaire associée à la matrice  ${}^t V V$  est définie positive.

**Solution :** 1.  $\forall x \in F, Q(x) > 0$ .

2. C'est le bloc carré supérieur gauche de taille  $k$  de  $M$ .

3.  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X ({}^t V V) X = {}^t (V X) (V X) > 0$ .

**Exercice 2** (9 pts). Soit  $n$  un entier strictement positif et  $(a_0, \dots, a_n)$  une famille de  $n + 1$  réels distincts. On note  $E = \mathbb{R}[X]_n$ . Pour tout  $j \in \mathbb{N}$  on note  $\mu_j = \sum_{0 \leq t \leq n} a_t^j$  puis

$$D_k = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} & \mu_k \\ \mu_1 & & \ddots & \ddots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{k-1} & \ddots & \ddots & & \mu_{2k-1} \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \cdots & \mu_{2k-1} & \mu_{2k} \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = \det(D_k)$$

pour tout  $0 \leq k \leq n$ .

1. Soit

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

la matrice de Vandermonde associée à  $(a_0, \dots, a_n)$ , que l'on rappelle inversible. Calculer  ${}^t V V$  et déduire de l'Exercice 1 que le réel  $\Delta_k$  est différent de 0 pour tout  $0 \leq k \leq n$ .

2. Soit

$$P_k = \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} & \mu_k \\ \mu_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \cdots & \mu_{2k-1} \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^k \end{pmatrix}$$

pour tous  $0 \leq k \leq n$ , avec la convention  $P_0 = 1$ . Montrer que  $P_k$  définit un polynôme de degré  $k$ . Donner son coefficient dominant en fonction des données précédentes (un déterminant qu'on ne calculera pas).

3. On définit une forme bilinéaire symétrique  $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{0 \leq k \leq n} P(a_k) Q(a_k)$$

pour tous  $P, Q \in E$ . Montrer qu'elle est définie positive sur  $E$ .

4. Montrer que pour tout  $0 \leq \ell < k \leq n$  on a  $\langle P_k, X^\ell \rangle = 0$ .
5. En déduire que  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  définit une base orthogonale échelonnée de  $E$ .
6. Montrer que  $\|P_k\|^2 = \Delta_{k-1} \Delta_k$  pour tous  $1 \leq k \leq n$ .
7. Soient  $P, Q$  deux polynômes de degrés  $\leq n - 1$ . Montrer que  $\langle X P, Q \rangle = \langle P, X Q \rangle$ .

8. Soit  $\bar{P}_k = P_k / \Delta_{k-1}$  pour tous  $1 \leq k \leq n$ . Montrer que pour tous  $0 \leq \ell < k-1 < n-1$  on a

$$\langle X\bar{P}_k - \bar{P}_{k+1}, P_\ell \rangle = 0.$$

9. D'après ce qui précède, pour tous  $1 \leq k \leq n-1$ , il existe donc des réels  $b_k, c_k$  tels que

$$X\bar{P}_k = b_k \bar{P}_{k-1} + c_k \bar{P}_k + \bar{P}_{k+1}.$$

Montrer que  $b_k = \|\bar{P}_k\|^2 / \|\bar{P}_{k-1}\|^2$ .

Solution : 1.  $D_k$  est la bloc supérieur gauche carré de taille  $k+1$  de la matrice définie positive  ${}^tVV$ , donc d'après l'exercice 1 c'est aussi une matrice définie positive et en particulier son déterminant est non nul.

2. En développant selon la dernière ligne on obtient un polynôme de degré  $k$  de coefficient dominant  $\Delta_{k-1}$ .

3. Si  $\langle P, P \rangle = 0$  et  $P \in E$ , alors  $P$  a  $n+1$  racines et donc  $P = 0$ .

4. On a par linéarité par rapport à la dernière ligne

$$\langle P_k, X^\ell \rangle = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k^\ell \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} & \mu_k \\ \mu_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \cdots & \mu_{2k-1} \\ 1 & a_k & a_k^2 & \cdots & a_k^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} & \mu_k \\ \mu_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \cdots & \mu_{2k-1} \\ \mu_l & \mu_{l+1} & \cdots & \cdots & \mu_{l+k} \end{vmatrix} = 0$$

car on a 2 lignes identiques si  $0 \leq l \leq k-1$ .

5. C'est 4 et 2.

6. On a  $\|P_k\|^2 = \Delta_{k-1} \langle P_k, X^k \rangle$  d'après 2 et 4, et  $\langle P_k, X^k \rangle = \Delta_k$  par le calcul de 4.

7. Les deux quantités sont égales à  $\sum_{0 \leq k \leq n} a_k P(a_k) Q(a_k)$ .

8. On a  $\langle X\bar{P}_k, P_\ell \rangle = \langle \bar{P}_k, X P_\ell \rangle = 0$  car  $\deg(X P_\ell) = 1 + \ell < k$ , et  $\langle \bar{P}_{k+1}, P_\ell \rangle = 0$  car  $\ell < k+1$ .

9. Le coefficient dominant de  $\bar{P}_k$  est 1 donc  $X\bar{P}_k - \bar{P}_{k+1}$  est de coefficient  $\leq k$ . D'après la question précédente sa décomposition sur la base orthogonale des  $(\bar{P}_j)_{0 \leq j \leq n}$  est du type  $X\bar{P}_k - \bar{P}_{k+1} = b_k \bar{P}_{k-1} + c_k \bar{P}_k$ . On a par orthogonalité

$$b_k \|\bar{P}_{k-1}\|^2 = \langle X\bar{P}_k, \bar{P}_{k-1} \rangle = \langle \bar{P}_k, X\bar{P}_{k-1} \rangle = \langle \bar{P}_k, X^k \rangle = \langle \bar{P}_k, \bar{P}_k \rangle.$$

**Exercice 3** (5 pts). Trigonaliser la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On donnera la matrice de passage.

Solution :  $\chi = (X-1)^4$ .

•  $\text{rang}(M-I) = 2$  mais  $(M-I)^2 \neq 0$  donc il y a 2 blocs de Jordan de tailles 1 et 3.

• On choisit  $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \ker((M-I)^2)$  et on pose  $b_2 = (M-I)b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  puis  $b_1 = (M-I)^2 b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

• Il reste à choisir  $b_4$  dans l'espace propre non colinéaire à  $b_1$ , par exemple  $b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 4** (5 pts). Soit  $n > 0, p > 0$  des entiers. Pour  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on pose

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB),$$

où Tr est la trace.

1. Montrer que  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \langle -, - \rangle)$  est un espace euclidien.

2. Notons  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'espace des matrices symétriques réelles carrées de taille  $n \times n$ . Montrer que si  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  alors

$$\text{Tr}(AB)^2 \leq \text{Tr}(A^2) \text{Tr}(B^2).$$

3. On suppose désormais que  $n = p = 2$  et on considère

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que  $(A_1, A_2, A_3)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

(b) En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt, trouver une famille  $(B_1, B_2, B_3)$  orthogonale pour  $\langle -, - \rangle$  telle que

$$\text{Vect}(B_1, B_2, B_3) = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3).$$

Solution : 1. Utiliser  $\langle A, A \rangle = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} A_{i,j}^2$ .

2. C'est Cauchy-Schwarz.

3(b).  $B_1 = A_1$  puis

$$B_2 = A_2 - \frac{\langle A_2, B_1 \rangle}{\|B_1\|^2} B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B_3 = A_3 - \frac{\langle A_3, B_1 \rangle}{\|B_1\|^2} B_1 - \frac{\langle A_3, B_2 \rangle}{\|B_2\|^2} B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

en remarquant  $\langle A_3, B_2 \rangle = 0$ .