Algèbre linéaire et bilinéaire
Devoir Maison
à rendre le 9 Octobre

• Soit $d \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ converge si elle converge “coefficient par coefficient”, c'est-à-dire si pour toute paire d'index $1 \leq i, j \leq d$ la suite de complexes $((A_n)_{i,j})_{n\geq 0}$ admet une limite qu'on note $A_{i,j}$. On pose alors $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq d} = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

Remarque. C'est la convergence pour la norme $\|A\| = \sum_{1\leq i,j\leq d} |A_{i,j}|$, mais on rappelle que $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, les normes sont toutes équivalentes.

Notation. Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, quand la suite de terme général $\exp_n(A) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$ converge, on note sa limite $\exp(A)$ ou e^A.

Remarque. Pour $d = 1$, on retrouve l'exponentielle complexe qui peut être définie par $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

• Si les coefficients $A_{i,j}$ d'une matrice A sont des fonctions dérivables d'une variable réelle t à valeurs complexes, on peut la dériver “coefficient par coefficient”, c'est-à-dire définir $t \mapsto A'(t)$ ou $\frac{dA}{dt}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ par $A'(t)_{i,j} = A'_{i,j}(t)$. On peut alors vérifier que :

(i) si $A(t) = f(t)B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et B ne dépend pas de t, on a $A'(t) = f'(t)B$;

(ii) si $A(t) = BC(t)D \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ où B et D ne dépendent pas de t et $C(t)$ est dérivable, alors $A(t)$ aussi et $A'(t) = BC'(t)D$.

(iii) si $A(t) = B(t)C(t) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ avec $B(t)$ et $C(t)$ dérivables, alors $A(t)$ l'est aussi et $A'(t) = B'(t)C(t) + B(t)C'(t)$.

• De manière analogue, si les coefficients $A_{i,j}$ d'une matrice A sont des fonctions d'une variable réelle t d'intégrale convergente sur un intervalle I, on peut définir $\int_I A(t)dt \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ “coefficient par coefficient”, c'est-à-dire poser $(\int_I A(t)dt)_{i,j} = \int_I A(t)_{i,j}dt$.

1. Soit $N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Soit $r \geq 0$ tel que $N^{r+1} = 0$.
   (a) Montrer que la suite $(\exp_n(N))$ converge.
   (b) Utiliser (i) pour calculer $\frac{d}{dt}\exp_{r+1}(tN)$ en fonction de N et $\exp_r(tN)$.
   (c) En déduire $\frac{d}{dt}e^{tN}$ en fonction de N.
2. Soit $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice diagonale.
   (a) Montrer que la suite $(\exp_n(\Lambda))$ converge et exprimer e^Λ en fonction des λ_i.
   (b) Calculer $\frac{d}{dt}e^{t\Lambda}$ en fonction de Λ.
3. Soit $D \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Soient P et Λ respectivement inversible et diagonale telles que $D = P^{-1}\Lambda P$.
   (a) Pour $n \geq 0$, exprimer $\exp_n(D)$ en fonction de $\exp_n(\Lambda)$.
   (b) En déduire l'existence de e^D et l'exprimer en fonction de e^Λ.
   (c) Utiliser (ii) pour calculer $\frac{d}{dt}e^{tD}$ en fonction de D.
4. Soit $A = D + N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ décomposée selon Dunford : N est nilpotente, il existe P et Λ respectivement inversible et diagonale telles que $D = P^{-1}\Lambda P$, et $[N, D] = 0$.
   (a) Pour $n \geq 0$, montrer que $\frac{1}{k!}A^k = \sum_{p+q=k} \frac{1}{p!}D^p \frac{1}{q!}N^q$.
   (b) En déduire que $\exp_n(A)$ converge et exprimer e^A en fonction de D et N.
   (c) Utiliser (iii) pour calculer $\frac{d}{dt}e^{tA}$ en fonction de A.

5. Soient $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et $V \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathscr{C}^0(I))$ un vecteur dont les coordonnées sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ contenant 0. On définit une fonction $X_0 : I \to \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ par

$$X_0(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} V(s) ds.$$

Montrer que X_0 est dérivable et calculer sa dérivée en fonction de A, X_0 et V.

Les questions 4. et 5. impliquent le résultat suivant.
Théorème. Soient $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $V \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathscr{C}^0(I))$ pour un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ contenant 0, et $X_0 \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathscr{C}^1(I))$ définie par $X_0(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} V(s) ds$.
Alors les solutions $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathscr{C}^1(I))$ du système différentiel non homogène d'ordre 1

$$X'(t) = AX(t) + V$$

sont données par $X(t) = e^{tA}C + X_0(t)$ pour une certaine colonne constante $C \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$.

6. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) - x(t) - z(t) & = & 0 \\ y'(t) - 2y(t) & = & 1 \\ z'(t) - z(t) & = & 0. \end{array} \right.$$

BONUS 7. Soit $A = \Lambda + N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec $N_{i,j} = 0$ pour tous $i \geq j$ (N triangulaire supérieure stricte), $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ diagonale, et $[N, \Lambda] = 0$. On suppose que les λ_i sont des réels strictement négatifs.
   (a) Montrer que $e^{tA} = R(t)e^{t\Lambda}$ où $R(t) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}[t])$.
   (b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{tA} dt$ converge.
   (c) Soit $Q \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Par un raisonnement analogue à ce qui précède on obtient l'existence de

$$P = \int_0^{+\infty} e^{sA^\top} Q e^{sA} ds.$$

   Montrer que $A^\top P + PA = -Q$ (équation de Lyapunov).
   (d) Montrer que P est symétrique si et seulement si Q l'est aussi.