UNIVERSITÉ D'ANGERS — Année 2024-2025

L3 MATH - MA - DL ME - DL MI

Algèbre linéaire et bilinéaire
Exercices complémentaires

Exercice 1. Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension quelconque, F et G deux sous-espaces supplémentaires, et $f \in \mathscr{L}(E)$ le projecteur F parallèlement à G. Soit $t \in \Bbbk$, et soit $u = \mathrm{id}_E + tf$.

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de u.
2. Pour quelles valeurs de t l'endomorphisme u est-il inversible ? Dans ce cas, donner une expression simple de u^{-1}.

Exercice 2. Soit $f : \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]$, $P \mapsto (X+1)(X-3)P'(X) - XP(X)$. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel réel de dimension impaire.

1. Montrer que tout endomorphisme stabilise une droite.
2. 🌶 Montrer que tout endomorphisme stabilise un hyperplan.

Exercice 4. Soit $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\Bbbk)$.

1. Écrire la matrice $N = A^{\mathrm{T}}A$.
2. Déterminer le rang de N et donner une base de $\ker N$.
3. Calculer NA^{T}.
4. Déterminer si N est diagonalisable.

Exercice 5. Soit $A \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^{\mathrm{T}}A$ et en déduire $\det(A)$.
2. En déduire χ_A.
3. 🌶 Déterminer une base de vecteurs propres pour A.

Exercice 6. On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & -m-1 & m+1 \\ m-2 & -m & m+2 \\ 2m-1 & -2m+1 & 2m+1 \end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.
2. On suppose $m \neq -1$ et $m \neq 1$. Montrer que A_m est diagonalisable. Quel est son polynôme minimal ?
3. La matrice A_{-1} est-elle diagonalisable ? Donner son polynôme minimal.
4. Montrer que A_1 n'est pas diagonalisable. Donner son polynôme minimal et une base de trigonalisation.

Exercice 7. Soit $f : \Bbbk_n[X] \to \Bbbk_n[X]$, $P \mapsto P(X+1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que $\Delta := f - \mathrm{id}$ est nilpotent, et donner son indice. En déduire la forme de Jordan de f.
3. Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on introduit le polynôme

$$B_k = \frac{n!}{k!} \prod_{\ell=1}^{k} (X + n - \ell)$$

avec la convention $B_0 = n!$. Montrer que $\mathscr{B} = (B_0, \ldots, B_n)$ est une base et donner la matrice de f dans celle-ci.

Exercice 8. Soit $J = J_n(0)$ la matrice de Jordan nilpotente de taille n.

1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle inversible P telle que $J = PJ^{\mathrm{T}}P^{-1}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible complexe Q telle que $Q^{\mathrm{T}}PQ = I_n$.
3. Montrer que $Q^{\mathrm{T}}J(Q^{\mathrm{T}})^{-1}$ est symétrique.
4. Conclure que toute matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice symétrique. Peut-on avoir le même résultat pour les matrices réelles ?

Exercice 9. Procéder à la réduction effective de Jordan de $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ le *rayon spectral* de A.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On considère $D_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n)$. Calculer $D_\varepsilon^{-1}J_n(0)D_\varepsilon$ en fonction de $J_n(0)$.
2. Calculer la norme $\|J_n(0)\|_\varepsilon$ subordonnée à la norme $\|x\|_\varepsilon = \|D_\varepsilon^{-1}x\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$.
3. Utiliser la réduction de Jordan pour définir une norme subordonnée telle que $\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$.
4. En déduire que $\rho(A) = \inf \|A\|$ sur les normes subordonnées.

Exercice 11. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On dit qu'une valeur propre de A est *semi-simple* si sa multiplicité dans le polynôme caractéristique de A est égale à la dimension de l'espace propre associé. Montrer qu'une valeur propre est semi-simple si et seulement si sa multiplicité dans le polynôme minimal est 1.

Exercice 12. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A^k)_{k \geq 0}$ est bornée si et seulement si $\rho(A) \leq 1$ et les valeurs propres de module 1 sont toutes semi-simples.

Exercice 13. Soit $(E, \langle -, - \rangle)$ euclidien de dimension n, de norme associée $\| - \|$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ symétrique. Soit $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Montrer que

$$\|u\| = \rho(u) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|.$$

Exercice 14. On considère $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $H_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

1. Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Montrer que
$$\langle HX, X \rangle = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt.$$
2. Montrer que la forme quadratique associée à H est définie positive.

Exercice 15. On considère $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

et le sous-espace $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F = X\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $F^\perp$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(0)Q^{(j)}(0)}{j!^2}.$$

1. Calculer $\langle X^k, P\rangle$ pour tous $k \in [\![0, n]\!]$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner une base orthonormée.

Exercice 17. Soit $(E, \langle -, -\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Pour toute famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_m)$ de E on introduit le *déterminant de Gram* :

$$G(x_1, \dots, x_m) = \det(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\le i,j\le m}.$$

1. Montrer que $G(x_1, \dots, x_m) = 0$ pour toute famille $(x_1, \dots, x_m)$ liée de E.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F : pour tout $x = y + z \in F \oplus F^\perp$, $p(x) = y$. Soit $d = \|z\| = \|x - p(x)\|$ la distance de x à F. Soit $(f_1, \dots, f_r)$ une base de F. Montrer en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne que
$$G(x, f_1, \dots, f_r) = d^2 G(f_1, \dots, f_r).$$

Exercice 18 (Polynômes de Laguerre)**.** Soit $\langle -, -\rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ l'application bilinéaire symétrique définie par

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$$

pour toute paire de polynômes (P, Q).

1. Expliquer pourquoi cette intégrale est toujours définie.
2. Expliquer brièvement pourquoi $\langle -, -\rangle$ est définie positive.
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$x \mapsto e^x \frac{d}{dx}\left(xP'(x)e^{-x}\right)$$
est polynomiale. On note $u(P)$ le polynôme associé. Montrer que l'application $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ ainsi définie est linéaire, et symétrique vis-à-vis du produit scalaire $\langle -, -\rangle$.
4. On fixe un entier $n > 0$. Montrer que $E = \mathbb{R}_n[X]$ est stable par u. On note $u_n \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme induit.
5. Expliquer pourquoi u_n est diagonalisable.
6. Calculer $u_n(X^k)$ pour tous $0 \le k \le n$ et en déduire les valeurs propres de u_n.
7. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose
$$h_n(x) = x^n e^{-x} \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$
   (a) Calculer explicitement L_0 et L_1.
   (b) En utilisant la formule de Leibniz rappelée ci-dessous, montrer que L_n définit un polynôme pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner son degré et son coefficient dominant.
   (c) Montrer en utilisant à nouveau la formule de Leibniz que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a
$$x\left(h_n^{(n)}(x) + h_n^{(n+1)}(x)\right) = -n h_n^{(n-1)}(x).$$
   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u(L_n) = -nL_n$.
   (e) Montrer que $\int_0^{+\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = 0$ si $n \neq m$.