UNIVERSITÉ D'ANGERS — Année 2024-2025
L3 MATH - MA - DL ME - DL MI

Algèbre linéaire et bilinéaire
Exercices

Dans ce qui suit, $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Algèbre linéaire, éléments propres

Exercice 1. Soit $\mathscr{L}$ l'espace vectoriel des endomorphismes d'un $\Bbbk$-espace vectoriel E de dimension quelconque. La composition fait de $\mathscr{L}$ une $\Bbbk$-algèbre. Soit $\mathfrak{z}$ son *centre* :

$$\mathfrak{z} = \{u \in \mathscr{L} \mid \forall v \in \mathscr{L},\ u \circ v = v \circ u\}.$$

On se propose de montrer que seules les homothéties en font partie : $\mathfrak{z} = \Bbbk \mathrm{id}_E$. Soit $u \in \mathfrak{z}$.

1. Soit $x \in E$. En utilisant une projection sur $\Bbbk x$, montrer que x est propre pour u.
2. Soient x et y deux vecteurs non colinéaires. Montrer qu'ils sont propres pour u pour la même valeur propre.
   Indice : considérer $x + y$.
3. Conclure.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\Bbbk$. On note $E^\vee$ l'espace vectoriel des formes linéaires $E \to \Bbbk$ et Tr la fonction trace. Pour tout $A \in E$ on note φ_A la forme linéaire $B \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$.

1. Montrer que $\varphi : E \to E^\vee$, $A \mapsto \varphi_A$ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Montrer que pour toute forme linéaire $f \in E^\vee$ il existe $A \in E$ tel que $f(B) = \mathrm{Tr}(AB)$ pour tout $B \in E$.
4. Montrer que si $f \in E^\vee$ satisfait $f(XY) = f(YX)$ pour tous $X, Y \in E$, alors f est colinéaire à Tr.
   Indice : utiliser l'exercice précédent.

Exercice 3. Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$. Montrer que φ est linéaire et trouver ses valeurs propres et sous-espaces propres.

Exercice 4. Soit $f : \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]$, $P \mapsto P(X) - XP'(X)$. Montrer que f est linéaire et trouver une base de $\Bbbk[X]$ faite de vecteurs propres de f.

Exercice 5. Soit n un entier positif et $f : \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]$, $P \mapsto (X-1)(X-2)P' - nXP$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que $E := \Bbbk_n[X]$ est stable par f. On note $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme induit.
3. Écrire la matrice M de φ dans la base de canonique de E.
4. Soit $\lambda \in \Bbbk$. Calculer en fonction de λ les scalaires α, β satisfaisant
$$\frac{nX+\lambda}{(X-1)(X-2)} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X-2}.$$
5. Résoudre sur $]1,2[$ l'équation différentielle
$$(t-1)(t-2)y' - (nt+\lambda)y = 0.$$
   Pour quelles valeurs de λ les solutions sont-elles polynômiales en t ?
6. En déduire les valeurs propres et espaces propres de φ, ainsi que $\det(M)$.

Exercice 6. Soit $f : \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]$, $P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f. On pourra montrer que si $P \in \ker(f)$, alors le polynôme $\Delta P := P(X+1) - P(X)$ est constant. Il n'est pas nécessaire de répondre à cette question pour traiter la suite.
3. Soit un entier $n \geq 1$, et $E = \Bbbk_n[X]$. Montrer que f stabilise E. On note $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme induit.
4. Déduire le noyau et l'image de φ du calcul des $\varphi(X^k)$, $0 \leq k \leq n$.
5. Soit $Q \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Montrer qu'il existe un unique $P \in E$ tel que $\varphi(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ des fonctions continues $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$. On définit l'application $u : E \to E$ par

$$u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t) f(t) dt$$

pour tout $f \in E$ et tout $x \in [-\pi,\pi]$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Montrer que le rang de u est 2.
3. Montrer que u n'admet qu'une valeur propre non nulle et donner une base de l'espace propre associé.
4. Caractérisez l'appartenance de f à $\ker(u)$ en utilisant les coefficients de Fourier de f.

1.1 Diagonalisation

Exercice 8. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déduire du rang de $M + I$ et de la trace de M son polynôme caractéristique (sans calcul de déterminant !).
2. La matrice M est-elle diagonalisable ? En déduire son polynôme minimal et un inverse de M.

Exercice 9. Soit un entier $n \geq 1$, diagonaliser la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 10. Déterminer sans calcul si les matrices suivantes sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 42 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 42 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 42 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = 7M - 6I_n$. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 12. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Soient $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\Bbbk)$ et $A \in \mathscr{M}_4(\Bbbk)$ définie par blocs par $A = \begin{pmatrix} 0 & U \\ U & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer U^2 puis A^2 en fonction de U.
2. Calculer A^3 en fonction de A.
3. En déduire un polynôme annulateur de A. Est-elle diagonalisable ?
4. Donner le rang et la trace de A.
5. En déduire sans plus de calcul le polynôme caractéristique de A, et son polynôme minimal.

1.2 Nilpotence, triangulation, Jordan

Exercice 14 (Paires de matrices commutantes)**.**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ et $P \in \Bbbk[X]$. Montrer que A et $P(A)$ commutent.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ telles que $AB = BA$, et soit $P \in \Bbbk[X]$. Montrer que B laisse stables les noyau et l'image de $P(A)$.
3. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension n ; montrer que les endomorphismes de E qui commutent avec f sont ceux qui laissent stable chaque sous-espace propre de f.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ une matrice possédant n valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices qui commutent avec A sont les matrices qui peuvent s'écrire $B = P(A)$, avec $P \in \Bbbk[X]$.
   Indice : utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.
5. Soit
   $$A = J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que toutes les matrices qui commutent avec A peuvent s'écrire sous la forme $P(A)$, où P est un polynôme de degré au plus 2.
6. Généraliser à n quelconque : montrer que les seules matrices qui commutent avec la matrice de Jordan $J_n(0)$ nilpotente de taille n sont les polynômes en $J_n(0)$ (de degré $< n$).
7. Soient
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Vérifier que A et B commutent. B peut-elle s'écrire sous forme $P(A)$? Déterminer les valeurs propres de B et les espaces $\operatorname{Ker}(B - I)$ et $\operatorname{Ker}(B - 2I)$.

Exercice 15. Une matrice carrée M est dite nilpotente si $M^q = 0$ pour un $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe $q \leq n$, tel que $M^q = 0$.
2. Montrer que si M est nilpotente, alors $I - M$ est inversible. On donnera une formule explicite pour $(I - M)^{-1}$.
3. Montrer que toute matrice strictement triangulaire est nilpotente.
4. Montrer que si M est nilpotente et $M \neq 0$, alors $I - M$ n'est pas diagonalisable.
5. Donner un exemple d'une matrice nilpotente M et d'une matrice diagonalisable A telles que $A - M$ soit diagonalisable.

Exercice 16. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que A est trigonalisable sur $M_3(\mathbb{R})$.
2. Trouver explicitement une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$.
3. Écrire T sous la forme $T = \lambda I + N$ où N est une matrice triangulaire supérieure stricte (c.à.d. avec des zéros sur la diagonale). Calculer les puissances successives de N.
   Remarque : c'est une décomposition de Dunford !
4. En déduire les valeurs de T^n pour tout entier $n \geq 0$.
5. En déduire les valeurs de A^n pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 17. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\Bbbk)$. On note E l'espace vectoriel $\Bbbk^4$.

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_M.

2. Donner une base $\mathscr{E}_1$ de $E_1(M)$. M est-elle diagonalisable ?
3. Calculer $(M-I_4)^2$ et en déduire le polynôme minimal Π_M de M.
4. Expliquer pourquoi $E = \ker\big((M-I_4)^2\big) \oplus E_2(M)$.
5. Compléter $\mathscr{E}_1$ en une base $\mathscr{E}$ adaptée à la décomposition ci-dessus.
6. On note P la matrice de passage de la base canonique de E à $\mathscr{E}$. Calculer son inverse et écrire la matrice $P^{-1}MP$ comme la somme d'une matrice diagonale Δ et d'une matrice triangulaire supérieure stricte T telles que $T\Delta = \Delta T$.
7. En déduire la décomposition de Dunford de M.

Exercice 18. Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $M_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon^2 & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Donner une base adaptée à $\ker((M_\epsilon - \epsilon^2 I_3)^2) \oplus \ker(M)$.
2. Soit P_ϵ la matrice de passage associée, calculer son inverse, et donner la décomposition de Dunford de $P_\epsilon^{-1} M_\epsilon P_\epsilon$.
3. En déduire la décomposition de Dunford de M_ϵ.
4. Soit $f : \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'application (non linéaire !) qui à une matrice associe la partie nilpotente de sa décomposition de Dunford. Montrer que f n'est pas continue en 0.

Exercice 19. Soient n un entier et $\lambda \in \mathbb{k}$ un scalaire. Calculer le polynôme caractéristique et le poynôme minimal de la matrice de Jordan $M = J_n(\lambda)$ définie par :

$$M_{i,j} = \begin{cases} \lambda \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice 20. Mettre sous forme de Jordan les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et donner leur polynôme minimal.

Exercice 21. Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_M.
2. Calculer le rang de $M + 3I_4$. En déduire le nombre de blocs dans la réduction de Jordan de M.
3. Calculer $(M+3I_4)^2$ et en déduire la taille des blocs dans la réduction de Jordan de M.
4. Trouver un vecteur de la base canonique qui n'est pas dans $\ker(M+3I_4)^2$.
5. En déduire une base de réduction de Jordan pour M.

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer son polynôme minimal.
2. En déduire de la valeur de A^{-1} et A^3.
3. Trigonaliser A sous forme de Jordan et retrouver les résultats de la question précédente.

Exercice 23. Soit A une matrice carrée complexe.

1. Montrer que si A est semblable à $2A$, alors A est nilpotente.
2. Montrer la réciproque.

Exercice 24. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que la matrice de Jordan $J_n(0)$ nilpotente de taille n est semblable à sa transposée.
2. En déduire que toute matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.
3. En déduire que si un endomorphisme u d'en espace vectoriel complexe E de dimension finie stabilise un sous-espace de dimension k, il en stabilise aussi un de codimension k.
   Indice : considérer $u^\vee : E^\vee \to E^\vee$, $\varphi \mapsto \varphi \circ u$.

2 Algèbre bilinéaire

Exercice 25. Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes et préciser si elles sont définies :

1. $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé ;
2. $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt + yt$.

Exercice 26. Soit $q : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ défini par $q(P) = P'(1)^2 - P'(0)^2$.

1. Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire φ.
2. Quelle est la matrice de φ dans la base $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$?
3. Déterminer le noyau et le cône isotrope de q.
4. Est-ce que φ est non-dégénérée ? définie ? positive ? négative ?
5. Déterminer $\left\{X^2\right\}^\perp$ et $\{1\}^\perp$.
6. Trouver de deux manières la signature de q : réduction de Gauss et étude spectrale.

Exercice 27. Pour chacune des matrices symétriques suivantes, exprimer la forme bilinéaire et la forme quadratique associées, et effectuer la réduction de Gauss de ces formes quadratiques :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28. Montrer que les applications suivantes sont des formes quadratiques sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer leur signature :

$$q_1(A) = \mathrm{Tr}(A)^2,\ q_2(A) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A),\ q_3(A) = \mathrm{Tr}(A^2),\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 29. Trouver la signature de la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 30. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On pose $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$ et $v_3 = (-1,-1,0)$.

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille (v_1, v_2, v_3) de sorte à obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 31. On définit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormale de $\left(\mathbb{R}_2[X], \varphi\right)$.

Exercice 32. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$, pour $n \geq 1$, et u l'endomorphisme de E défini par $u(M) = M^{\mathrm{T}}$.

1. Montrer que la forme $\Phi : (M, N) \mapsto \mathrm{Tr}(M^{\mathrm{T}} N)$ est bilinéaire sur E, symétrique et définie positive.
2. Montrer que u est symétrique vis à vis du produit scalaire Φ.
3. Calculer le polynôme minimal et le spectre de u.
4. Décrire les espaces propres de u, et donner leur dimension. Quel est le polynôme caractéristique de u?
5. Donner une base orthonormale de chaque espace propre de u.
6. Soient S une matrice symétrique et A une matrice antisymétrique. Donner la valeur de $\Phi(S, A)$.
7. Donner la signature de la forme quadratique sur E définie par $Q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$. Est-elle définie?
8. Soit E_{ij}^* la base du dual $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ de E définie par $E_{ij}^*(M) = M_{ij}$ = le coefficient d'indice (i, j) de M. Montrer que l'application bilinéaire Φ^* sur E^* définie par $\Phi^*(E_{ij}^*, E_{k\ell}^*) = \mathrm{Tr}(E_{ji} E_{k\ell})$ est un produit scalaire.
9. Décomposer Q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes et orthogonales pour Φ^*.

Exercice 33. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $\ker(u^*) = \mathrm{im}(u)^\perp$ et $\mathrm{im}(u^*) = \ker(u)^\perp$.

Exercice 34.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $B = A^{\mathrm{T}} A$ est une matrice symétrique, et que la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée est définie positive.
2. Réciproquement, montrer qu'une matrice symétrique définie positive B peut toujours s'écrire comme $B = A^{\mathrm{T}} A$, où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.
3. Soit à nouveau $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Définir une matrice R symétrique définie positive telle que $R^2 = A^{\mathrm{T}} A$.
4. (Décomposition polaire) En déduire que toute matrice inversible peut s'écrire comme le produit QR d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique définie positive.

Exercice 35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ (des polynômes de degré $\leq n$), muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x) \, dx.$$

Pour tout $P \in E$, on pose $T(P) = (X^2 - X)P'' + (2X - 1)P'$.

1. Montrer que T définit un endomorphisme de E.
2. Montrer que cet endomorphisme est symétrique.

Exercice 36. Diagonaliser dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ les matrice suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 37. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer son noyau.
2. Calculer le polynôme caractéristique de M, puis donner son polynôme minimal.
3. Donner la signature de la forme quadratique donnée par

$$Q(t, x, y, z) = t^2 + 4x^2 + 3y^2 + z^2 - 4tx + 6ty + 2tz - 4xz - 6yz$$

   pour tout $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$.

4. Calculer une base orthonormée de vecteurs propres de M.

5. En déduire une famille de formes linéaires orthogonales (f_1, f_2, f_3) sur $\mathbb{R}^4$ telles que

$$Q(t,x,y,z) = -f_1(t,x,y,z)^2 + 2(f_2(t,x,y,z)^2 + f_3(t,x,y,z)^2)$$

pour tout $(t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 38. On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa norme usuelle $\|-\|$. Soit Q la forme quadratique définie par $Q(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$. Calculer le plus petit réel $C > 0$ et le plus grand réel $c > 0$ tels que

$$\forall v \in E, \qquad c\|v\| \leq \sqrt{Q(v)} \leq C\|v\|.$$

Exercice 39 (Polynômes de Legendre)**.** Soit $\langle -,- \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

pour toute paire de polynômes (P,Q).

1. Rappeler pourquoi $\langle -,- \rangle$ est bilinéaire, symétrique et définie positive.
2. Soit $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par

$$u(P) = \frac{d}{dX}((1-X^2)P')$$

pour tout polynôme P. Montrer que u est linéaire, et symétrique vis-à-vis du produit scalaire $\langle -,- \rangle$.
3. On fixe un entier $n > 0$. Montrer que $E = \mathbb{R}_n[X]$ est stable par u. On note $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme induit.
4. Expliquer pourquoi φ est diagonalisable.
5. Calculer $\varphi(X^k)$ pour tous $0 \leq k \leq n$ et en déduire les valeurs propres de φ.
6. Soit $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ une base propre pour φ. Quelle est la valeur de

$$\int_{-1}^{1} P_k(t)P_\ell(t)dt$$

pour toute paire d'entiers (k,ℓ) telle que $1 \leq k \neq \ell \leq n$?
7. Montrer que si on impose la condition $P_k(1) = 1$ on obtient les polynômes dits de *Legendre*, donnés par la formule explicite

$$L_k = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dX^k}[(X^2-1)^k].$$

Exercice 40 (Poynômes de Tchebychev)**.** Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels, et w la fonction définie sur $]-1,1[$ par $w(t) = (1-t^2)^{-1/2}$.

1. Montrer que pour tous $P, Q \in E$ l'intégrale $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)w(t)dt$ converge.
2. Rappeler pourquoi la forme $\Psi : (P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)w(t)dt$ est bilinéaire, symétrique et définie positive.
3. Montrer que pour tout $P \in E$, la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$t \mapsto w(t)^{-1}\frac{d}{dt}\Big(w(t)^{-1}P'(t)\Big)$$

est polynômiale, où d/dt désigne la dérivation usuelle par rapport à t.
On note cette fonction $u(P)$, définissant ainsi une application $u : E \to E$.
4. Montrer que u est linéaire, et symétrique pour le produit scalaire Ψ.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$ il existe un polynôme $T_n \in E$ (dit *de Tchebychev*) de degré n tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)).$$

6. Dériver deux fois l'expression ci-dessus et en déduire une équation différentielle linéaire (mais à coefficients non constants) d'ordre 2 satisfaite par T_n.
7. Montrer que T_n est propre pour u.
8. Donner la valeur de $\int_{-1}^{1} T_n(t)T_m(t)w(t)dt$ pour tous $m \neq n \geq 0$.