

Polynômes orthogonaux : un cas de Sturm–Liouville
Devoir Maison

Soient $\alpha < \beta < \gamma$ trois réels fixés. On pose $q = (X - \alpha)(X - \gamma)$, $\ell = X - \beta \in \mathbb{R}[X]$. On s'intéresse ici aux solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_\lambda) \quad qy'' + \ell y' + \lambda y = 0$$

où λ est un paramètre réel.

1. Montrer que $a, b > 0$ dans la décomposition en éléments simples

$$\frac{\ell}{q} = \frac{a}{X - \alpha} + \frac{c}{X - \gamma}.$$

2. Soit la fonction $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $w(t) = (t - \alpha)^{a-1}(\gamma - t)^{c-1}$. Montrer que $(P, Q) \mapsto \int_I PQw$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $(qw)' = \ell w$.
4. Montrer que l'endomorphisme u de E défini par $u(P) = qP'' + \ell P'$ est symétrique.
5. Montrer que les sous espaces $E_n = \mathbb{R}[X]_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont stabilisés par u . Donner le spectre de u sur chaque E_n .
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = q^n w$. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ il existe un polynôme s_k de degré k et de coefficient dominant positif tel que

$$h_n^{(k)} = q^{n-k} s_k w.$$

7. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a $h_n^{(k)}(\alpha) = h_n^{(k)}(\gamma) = 0$.
8. Montrer que pour tout $n \geq 1$, le polynôme

$$P_n = s_n = w^{-1} h_n^{(n)}$$

est orthogonal à $\mathbb{R}[X]_{n-1}$.

9. En déduire que les P_n , $n \geq 0$, forment une famille de polynômes orthogonaux, et qu'ils sont propres pour u .
10. Donner les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $(\mathcal{E}_\lambda)$ admet des solutions polynomiales non nulles, et donner ces solutions.