Algèbre linéaire et bilinéaire
SOLUTION EXERCICES 37-39-40

Exercice 1. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer son noyau.
2. Calculer le polynôme caractéristique de M, puis donner son polynôme minimal.
3. Donner la signature de la forme quadratique donnée par
$$Q(t,x,y,z) = t^2 + 4x^2 + 3y^2 + z^2 - 4tx + 6ty + 2tz - 4xz - 6yz$$
pour tout $(t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$.
4. Calculer une base orthonormée de vecteurs propres de M.
5. En déduire une famille de formes linéaires orthogonales (f_1, f_2, f_3) sur $\mathbb{R}^4$ telles que
$$Q(t,x,y,z) = -f_1(t,x,y,z)^2 + 2(f_2(t,x,y,z)^2 + f_3(t,x,y,z)^2)$$
pour tout $(t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$.

Solution

1. On trouve $\ker M$ engendré par $(1,1,0,1)$, et donc les colonnes $(C_k)_{1\le k\le 4}$ satisfont $C_1 + C_2 + C_4 = 0$.
2. Ceci suggère de calculer le polynôme caractéristique en commençant par ajouter C_1 et C_2 à C_4. Ensuite tout de passe bien et on aboutit à $\chi_M = X(X+3)(X-6)^2$. Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable et son polynôme minimal vaut $X(X+3)(X-6)$.
3. D'après ce qui précède la signature de la forme quadratique Q associée à M est (2,1).
4. Pour la valeur propre -3 on trouve la droite engendrée par $(1,0,-1,-1)$. Pour la valeur propre 6 on trouve le plan d'équations $\begin{cases} t+x+z=0 \\ t-y-z=0 \end{cases}$ dont une base orthogonale est $((1,-1,1,0),(0,1,1,-1))$. Il faut éventuellement utiliser Gram–Schmidt.
5. Soit donc la matrice de passage $P = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On définit une base orthogonale (f_0, f_1, f_2, f_3) de formes linéaires par
$$\forall X = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \sqrt{3}\,{}^tPX = \begin{pmatrix} f_0(X) \\ f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{pmatrix} =: Y.$$
Dit autrement, la matrice dans la base canonique de f_i est la transposée de la $(i+1)$-ème colonne de $\sqrt{3}P$. On a alors
$$Q(t,x,y,z) = {}^tXMX = {}^tXP\mathrm{diag}(0,-3,6,6)\,{}^tPX = {}^tY\mathrm{diag}(0,-1,2,2)Y = -(t-y-z)^2 + 2((t-x+y)^2 + (x+y-z)^2).$$
Remarque : La famille de formes linéaires dépend de la base de diagonalisation choisie. Seule la signature est invariante. Par réduction de Gauss,
$$Q(t,x,y,z) = (t-2x+3y+z)^2 - 6(y-x+z)^2 + 6(x-z)^2.$$

Exercice 2. Soit $\langle -,- \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$
pour toute paire de polynômes (P,Q).

1. Montrer que $\langle -,-\rangle$ est bilinéaire, symétrique et définie positive.
2. Soit $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par

$$u(P) = \frac{d}{dX}((1-X^2)P')$$

pour tout polynôme P. Montrer que u est linéaire, et symétrique vis-à-vis du produit scalaire $\langle -,-\rangle$.
3. On fixe un entier $n > 0$. Montrer que $E = \mathbb{R}_n[X]$ est stable par u. On note $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme induit.
4. Expliquer pourquoi φ est diagonalisable.
5. Calculer $\varphi(X^k)$ pour tous $0 \leq k \leq n$ et en déduire les valeurs propres de φ.
6. Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une base propre pour φ. Quelle est la valeur de

$$\int_{-1}^{1} P_k(t)P_\ell(t)dt$$

pour toute paire d'entiers (k,ℓ) telle que $1 \leq k \neq \ell \leq n$?
7. Montrer que si on impose la condition $P_k(1) = 1$ on obtient les polynômes dits de *Legendre*, donnés par la formule explicite

$$L_k = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dX^k}\left((X^2-1)^k\right).$$

Solution

1. cf cours
2. Dériver et multiplier par un polynôme donné sont des opérations linéaires. Par double IPP,

$$\begin{aligned}
\langle u(P), Q\rangle &= \underbrace{[(1-t^2)P'(t)Q(t)]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)Q'(t)dt \\
&= -\underbrace{[P(t)(1-t^2)Q'(t)]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} P(t)\frac{d}{dt}((1-t^2)Q'(t))dt \\
&= \langle P, u(Q)\rangle.
\end{aligned}$$

Remarque : on peut faire l'économie de la 2ème ligne en remarque le membre de droite de la première ligne est symétrique en P et Q.
3. On a $\deg u(P) = \deg(P) - 1 + 2 - 1 = \deg(P)$.
4. Car φ est symétrique.
5. On a $u(1) = 0$, $u(X) = -2X$ et pour $k \geq 2$, $u(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - k(k+1)X^k$. Donc la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure stricte et son spectre se lit sur la diagonale : $-k(k+1)$, $0 \leq k \leq n$.
6. Comme les valeurs propres sont simples la base propre est forcément orthogonale.
7. Déjà $\deg(L_k) = k$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. Par IPPs successives on a pour tout $0 \leq p < k$

$$\begin{aligned}
2^k k! \langle L_k, X^p\rangle &= \underbrace{\left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left((t^2-1)^k\right)t^p\right]_{-1}^{1}}_{=0} - p\int_{-1}^{1}\frac{d^{k-1}}{t^{k-1}}\left((t^2-1)^k\right)t^{p-1}dt \\
&= \cdots = (-1)^p p! \int_{-1}^{1}\frac{d^{k-p}}{t^{k-1}}\left((t^2-1)^k\right)dt \\
&= \left[\frac{d^{k-p-1}}{dt^{k-1}}\left((t^2-1)^k\right)\right]_{-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

cette dernière ligne ayant du sens car $k \geq p+1$. On rappelle qu'un scalaire λ est racine de multiplicité m d'un polynôme P si et seulement si $P^{(k)}(\lambda) = 0$ pour tous $0 \leq k \leq m-1$. Comme $\mathrm{Vect}(1, \dots, X^{k-1}) = \mathrm{Vect}(L_0, \dots, L_{k-1})$, on obtient que les polynômes (L_k) sont orthogonaux. Par Leibniz on a

$$2^k k! L_k(1) = \left((X-1)^k(X+1)^k\right)^{(k)}(1) = \sum_{0 \leq p \leq k}\binom{k}{p}\underbrace{\left((X-1)^k\right)^{(p)}(1)}_{=0 \text{ si } p<k}\left((X+1)^k\right)^{(k-p)}(1) = 2^k k!.$$

D'après les questions 5 et 6, les polynômes propres (P_k) satisfaisant $P_k(1) = 1$ vérifient aussi ces propriétés. Elles sont donc égales d'après le cours (corollaire 8.47)

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels, et w la fonction définie sur $]-1,1[$ par $w(t) = (1-t^2)^{-1/2}$.

1. Montrer que pour tous $P, Q \in E$ l'intégrale $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)w(t)dt$ converge.
2. Montrer que la forme $\Psi : (P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)w(t)dt$ est bilinéaire, symétrique et définie positive.
3. Montrer que pour tout $P \in E$, la fonction définie sur $]-1,1[$ par
$$t \mapsto w(t)^{-1} \frac{d}{dt}\Big(w(t)^{-1}P'(t)\Big)$$
est polynômiale, où d/dt désigne la dérivation usuelle par rapport à t.
On note cette fonction $u(P)$, définissant ainsi une application $u : E \to E$.
4. Montrer que u est linéaire, et symétrique pour le produit scalaire Ψ.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$ il existe un polynôme $T_n \in E$ (dit *de Tchebychev*) de degré n tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)).$$
6. Dériver deux fois l'expression ci-dessus et en déduire une équation différentielle linéaire (mais à coefficients non constants) d'ordre 2 satisfaite par T_n.
7. Montrer que T_n est propre pour u.
8. Donner la valeur de $\int_{-1}^{1} T_n(t)T_m(t)w(t)dt$ pour tous $m \neq n \geq 0$.

Solution

1. w est paire et en 1 équivaut à $1/\sqrt{2(1-t)}$ qui est intégrable ($1/\sqrt{u}$ est intégrable en 0). A fortiori si multipliée par un polynôme.
2. cf cours.
3. Découle de $(w^{-1})'(t) = -tw(t)$ et $w^{-2}(t) = 1-t^2$ polynomiale. Ainsi
$$u(P) = -XP' + (1-X^2)P''.$$
4. On a par IPP
$$\Psi(u(P),Q) = \underbrace{[w(t)^{-1}P'(t)Q(t)]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} w(t)^{-1}P'(t)Q'(t)dt.$$
Le membre de droite est symétrique en (P,Q) donc vaut aussi $\Psi(u(Q),P)$.
5. cf L1.
6. En dérivant deux fois on obtient pour tout $\theta \in \mathbb{R}$
$$-n^2T_n(\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta) = -\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta)T_n''(\cos(\theta))$$
et donc pour tout $t \in [-1,1]$, vu que $\sin^2 = 1-\cos^2$,
$$-n^2T_n(t) = -tT_n'(t) + (1-t^2)T_n''(t).$$
7. C'est une égalité entre fonctions polynomiales en une infinité de valeurs donc $-n^2T_n = u(T_n)$.
8. C'est le produit scalaire entre des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc : 0.