UNIVERSITÉ D'ANGERS
L3

Décomposition de Dunford par l'analyse complexe
Devoir Maison

• On dit qu'une fonction $z : I \to \mathbb{C}$ définie sur un intervalle réel est dérivable en $t_0 \in I$ si les fonctions $\Re z := \mathfrak{Re} \circ z$ et $\Im z := \mathfrak{Im} \circ z : I \to \mathbb{R}$ le sont, auquel cas on définit sa dérivée par $z'(t_0) = (\Re z)'(t_0) + i(\Im z)'(t_0)$. Les règles de calcul de dérivées (somme, produit, composition) connues pour les fonctions à valeurs réelles restent alors vraies dans ce cadre.

• De manière analogue on définit l'intégrale de $z : I \to \mathbb{C}$ continue par $\int_I z = \int_I \Re z + i \int_I \Im z$.

• Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on note $\gamma(\lambda, r) \subset \mathbb{C}$ le cercle centré en λ de rayon r. On dispose du paramétrage $\gamma(\lambda, r) = \{\, \lambda + re^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\,\}$. Pour toute fonction continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on définit

$$\oint_{\gamma(\lambda,r)} f(z)dz := ir \int_0^{2\pi} f(\lambda + re^{i\theta})e^{i\theta} d\theta. \tag{1}$$

• Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $M : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction telle que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ la fonction $I \to \mathbb{C}$, $t \mapsto M(t)_{i,j}$ est continue. On définit la matrice $\int_I M(t)dt \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\left(\int_I M(t)dt\right)_{i,j} = \int_I M(t)_{i,j} dt.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f_n(\theta) = e^{in\theta}$. Calculer f_n' ainsi que $\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta$.
2. Soient $w \in \mathbb{C}$, $r \in]0, |w|[$ et $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Calculer la dérivée de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par
$$g(\theta) = \frac{1}{(w + re^{i\theta})^p}.$$
3. Soient $w \in \mathbb{C}$, $r \in]0, |w|[$ et $p \geq 2$. Utiliser (1) pour calculer la valeur de
$$\oint_{\gamma(0,r)} \frac{dz}{(w+z)^p}.$$
4. Soit $\rho = \frac{-r}{w}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \rho^n f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.
5. En déduire la valeur de
$$\oint_{\gamma(0,r)} \frac{dz}{w+z}.$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ et de polynôme caractéristique $\chi_A = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{m_k}$ où $m_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. On note $N_k = \ker\left((A - \lambda_k I_n)^{m_k}\right)$ les sous-espaces caractéristiques de A. On suppose A sous forme de Jordan : diagonale par blocs carrés du type $J_\ell + \lambda I_\ell \in \mathscr{M}_\ell(\mathbb{C})$, où comme d'habitude $(J_\ell)_{ij} = \delta_{j,i+1}$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r < |\lambda_k - \lambda_j|$ pour tous $j, k \in [\![1, s]\!]$

6. Soit $k \in [\![1, s]\!]$. Expliquer pourquoi $zI_n - A$ est inversible si $z \in \gamma(\lambda_k, r)$. On définit alors
$$P_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma(\lambda_k,r)} (zI_n - A)^{-1} dz \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$
7. Soient $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Trouver le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ℓ tel que $P(J_\ell) = (vI_\ell - J_\ell)^{-1}$.
8. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_k\}$. Calculer
$$\oint_{\gamma(\lambda_k,r)} \left(zI_\ell - (J_\ell + \lambda I_\ell)\right)^{-1} dz \in \mathscr{M}_\ell(\mathbb{C}).$$
9. Montrer que P_k est le projecteur sur N_k parallèle à $\oplus_{j\neq k} N_j$.
10. Soit $z \in \mathbb{C}$ une valeur *non* propre pour A. À l'aide du polynôme minimal μ_A de A, écrire $(zI_n - A)^{-1}$ comme un polynôme en A. En déduire que P_k est polynomial en A.