

Fondements d'Analyse

Table des matières

1 Développements limités	1
1.1 Notations de Landau	1
1.2 Développements limités	3
1.3 Allure locale d'une courbe paramétrée plane	5
2 Équations différentielles linéaires	6
2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1	6
2.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants	7

1 Développements limités

1.1 Notations de Landau

On dit qu'une propriété est vraie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, ou localement en a , si il existe $\eta > 0$ tel que la propriété est vraie sur $]a - \eta, a + \eta[$ si $a \in \mathbb{R}$, $] -\infty, \eta[$ si $a = -\infty$, $]a, +\infty[$ si $a = +\infty$.

Définition 1.1 (Notations de Landau). Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I . Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un point *adhérent* à I , c'est-à-dire un point de I ou l'une de ses bornes.

- f est dite *équivalente* à g en a s'il existe une fonction λ telle que $f = \lambda g$ au voisinage de a , et $\lambda \rightarrow 1$ en a . On note $f \sim g$ (et on précise "en a " si nécessaire).
- f est dite *dominée* par g en a s'il existe une fonction μ telle que $f = \mu g$ au voisinage de a , et μ bornée. On note $f = O(g)$ (et on précise "en a " si nécessaire).
- f est dite *négligeable* devant g en a s'il existe une fonction ε telle que $f = \varepsilon g$ au voisinage de a , et $\varepsilon \rightarrow 0$ en a . On note $f = o(g)$ (et on précise "en a " si nécessaire).

Exemple 1.2. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. En $a \in \mathbb{R}$ on a $(x - a)^n = o((x - a)^m)$ si et seulement si $n > m$. En $\pm\infty$, $(x - a)^n = o((x - a)^m)$ si et seulement si $n < m$.

D'après les propriétés classiques sur les limites, on peut en déduire une batterie de propriétés sur $\sim$, o et O . En voici quelques unes.

Remarque 1.3. Soient des fonctions f, g, h définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si ce n'est pas précisé les propriétés qui suivent sont en a .

- (i) Si g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en $a \in \mathbb{R}$ auquel cas on suppose $f(a) = 0$, alors en a

$$f \sim g \iff \frac{f}{g} \rightarrow 1, \quad f = O(g) \iff \frac{f}{g} \text{ bornée} \quad \text{et} \quad f = o(g) \iff \frac{f}{g} \rightarrow 0.$$

- (ii) On a $f \sim g \iff f = g + o(g)$ et $f \sim g \implies f = O(g) \Leftarrow f = o(g)$.

- (iii) $f \sim 0$ en a si et seulement si f est identiquement nulle au voisinage de a .

- (iv) $f \sim \ell \neq 0$ en $a \iff f \rightarrow \ell$ en a .

- (v) Si $f \sim g$ en a , alors soit f et g ont une limite en a , soit f et g divergent.

- (vi) $f = o(1)$ en a si et seulement si $f \rightarrow 0$ en a .

- (vii) On a $ho(g) = o(hg)$, $hO(g) = O(hg)$ et $f \sim g \Rightarrow hf \sim hg$.
- (viii) Pour toute constante non nulle α , on a $o(g) = o(\alpha g)$ et $O(g) = O(\alpha g)$.
- (ix) les notations o et O (dites *de Landau*) sont très pratiques dans les calculs, mais trompeuses. Par exemple, $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g) \not\Rightarrow f_1 = f_2$: en effet $f_1 = \varepsilon_1 g$ et $f_2 = \varepsilon_2 g$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ en a , mais a priori $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Par contre pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 \rightarrow 0$ donc en a ,

$$\alpha o(g) + \beta o(g) = o(g).$$

- (x) (Symétrie) Une fonction qui tend vers 1 en a est en particulier > 0 au voisinage de a . On en déduit que si $f \sim g$, on a $g \sim f$ et que localement f et g sont soit simultanément nulles, > 0 ou < 0 .
- (xi) (Transitivité) On a $o(o(g)) = o(g)$, $O(O(g)) = O(g)$ et $f \sim g \sim h \Rightarrow f \sim h$.
- (xii) On a $f \sim f$ donc $\sim$ est une relation *réflexive*, et donc une *relation d'équivalence* d'après les deux précédents points.
- (xiii) La limite du produit d'une fonction localement bornée par une fonction qui tend vers 0 tend aussi vers 0. Ainsi $O(f)o(g) = O(o(fg)) = o(fg)$. En particulier :
- $o(f)o(g) = o(fg)$;
 - $\forall n \in \mathbb{N}$, $o(f)^n = o(f^n)$;
 - si f est continue en a , $f o(g) = o(g)$.

Proposition 1.4. Soit f localement $\mathcal{C}^1$ en $a \in \mathbb{R}$. Alors $o(f(x) - f(a)) = o(x - a)$ en a .

Démonstration. Soit $M > 0$ une borne locale de f' et $\varepsilon > 0$. Par le théorème des accroissements finis, on a $|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|$ au voisinage de a . Mais quitte à restreindre ce voisinage on a aussi $|o(f(x) - f(a))| \leq (\varepsilon/M)|f(x) - f(a)|$. On en déduit que localement $|o(f(x) - f(a))| \leq \varepsilon|x - a|$ comme souhaité. $\square$

A La relation $\sim$ ne se comporte pas bien vis-à-vis de la somme des fonctions. En général, $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2 \not\Rightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$, par exemple en $+\infty$, $x \sim x + 1$ mais $0 = x - x \not\sim x + 1 - x = 1$. On énonce cependant :

Proposition 1.5. Soit f_1, f_2, g_1, g_2 définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$. Alors :

- si $g_2 = o(g_1)$, on a $f_1 + f_2 \sim g_1$;
- si localement $g_1, g_2 > 0$, on a $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

Démonstration. Pour le premier point on a $o(g_2) = o(o(g_1)) = o(g_1)$ donc $f_1 + f_2 = g_1 + o(g_1) + g_2 + o(g_2) = g_1 + o(g_1)$. Pour le second on utilise $|g_1 + g_2| = g_1 + g_2$ pour dire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a localement

$$\left| \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} - 1 \right| = \left| \frac{f_1 - g_1 + f_2 - g_2}{g_1 + g_2} \right| \leq \frac{|f_1 - g_1| + |f_2 - g_2|}{g_1 + g_2} \leq \frac{\varepsilon g_1 + \varepsilon g_2}{g_1 + g_2} = \varepsilon$$

comme souhaité. $\square$

En revanche $\sim$ se comporte bien vis du produit et de l'exponentiation.

Proposition 1.6. Soit f_1, f_2, g_1, g_2 définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;
- si localement f_1^α et g_1^α sont définies, on a $f_1^\alpha \sim f_2^\alpha$.

Démonstration. Le produit de deux fonctions qui tendent vers 1 tend aussi vers 1. Pour le second point, si λ tend vers 1 alors localement $\exists \lambda^\alpha = e^{\alpha \ln(\lambda)} \rightarrow 1$. $\square$

A Malgré ce second point, il n'est pas en général possible de composer une équivalence à gauche, par exemple en $+\infty$, $x \sim x + 1$ mais $e^x \not\sim e^{x+1}$. À droite c'est vrai :

Proposition 1.7 (Changement de variable). Si $f \sim g$ en a et $u \rightarrow a$ en $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on a $f \circ u \sim g \circ u$ en b .

Démonstration. Si $\lambda \rightarrow 1$ en a , alors $\lambda \circ u \rightarrow 1$ en b . $\square$

1.2 Développements limités

Notation 1.8 (Aparté polynômial).

- Soit $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ réelles à support fini : $\exists n \in \mathbb{N}, k > n \Rightarrow \alpha_k = 0$. On note $\mathbb{R}[X] = \{\sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k X^k \mid \alpha \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\}$ l'ensemble des polynômes en l'indéterminée X .
- Pour tout $P = \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k X^k$, on note $d = \deg(P) = \max\{k \mid \alpha_k \neq 0\}$, et pour tout $p \leq d$ on note

$$\tau_p P = \sum_{0 \leq k \leq p} \alpha_k X^k$$

la *troncation* de P à l'ordre p .

- Soit $a \in \mathbb{R}$, on obtient par division euclidienne itérée par $X - a$ l'existence d'une décomposition

$$P = \sum_{0 \leq k \leq n} \beta_k (X - a)^k \quad (1)$$

où $\beta_k \in \mathbb{R}$. Par dérivation itérée on obtient $\beta_k = P^{(k)}(a)/k!$.

Définition 1.9 (Développement limité). Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre n en un point $a \in \mathbb{R}$ adhérent à I (en abrégé, un $DL_n(a)$) si $f(x) = P(x - a) + o_a((x - a)^n)$ où P est un polynôme de degré $\leq n$, appelé la partie *régulière* du développement limité.

Exemple 1.10.

- Si f admet un $DL_n(a)$ de partie régulière P , alors pour tous $0 \leq p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$ de partie régulière $\tau_p P$.
- Tout polynôme admet un développement limité à tout ordre en tout point, cf (1).

Remarque 1.11. Si $f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k (x - a)^k + o((x - a)^n)$ et $\alpha_p \neq 0$ pour $1 \leq p \leq n$, alors en a

$$f(x) - \sum_{0 \leq k \leq p-1} \alpha_k (x - a)^k \sim \alpha_p (x - a)^p.$$

Proposition 1.12. Soit f définie au voisinage de a . Alors f a un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue, et f a un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable.

Démonstration. Si $f = \alpha + o(1)$ en a , on a $f(a) = \alpha$ et $f \rightarrow \alpha$ en a . Réciproquement si f est continue en a on a par définition $f = f(a) + o(1)$. Si $f = \alpha + \beta(x - a) + o(x - a)$, on a encore $\alpha = f(a)$ puis

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \beta + o(1)$$

admet une limite $f'(a) = \beta$ en a . La réciproque est immédiate. $\square$

⚠ Attention, f admet un $DL_2(a)$ $\nRightarrow$ f deux fois dérivable! par exemple $f(x) = x^3 \sin(1/x) = o(x^2)$ admet un $DL_2(0)$, est $\mathcal{C}^1$, mais pas deux fois dérivable en 0.

Proposition 1.13 (Unicité). Si f admet un $DL_n(a)$, sa partie régulière est unique.

Démonstration. Si $f(x) = P(x - a) + o((x - a)^n) = Q(x - a) + o((x - a)^n)$ avec P et Q de degré $\leq n$, soit $R = P - Q$. Si $R = \sum_{0 \leq k \leq n} \gamma_k X^k$ est non nul, soit $p = \min\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \gamma_k \neq 0\}$ si bien que $R(x - a) \sim \gamma_p (x - a)^p$ en a . Mais $R(x - a) = P(x - a) - Q(x - a) = o((x - a)^n)$ ce qui est impossible car $p \leq n$. Donc $R = 0$. $\square$

Proposition 1.14. Soient f admettant un $DL_n(a)$ de partie régulière P , et g admettant un $DL_n(a)$ de partie régulière Q . Alors $f + g$ (resp. fg) admet une $DL_n(a)$ de partie régulière $P + Q$ (resp. $\tau_n(PQ)$).

Démonstration. On a $f(x) + g(x) = P(x - a) + Q(x - a) + o((x - a)^n)$ en a avec $\deg(P + Q) \leq n$. Aussi,

$$\begin{aligned} fg(x) &= PQ(x - a) + \underbrace{P(x - a)o((x - a)^n) + Q(x - a)o((x - a)^n)}_{\substack{= o((x - a)^n) \\ \text{(xiii)}}} + \underbrace{o((x - a)^n)o((x - a)^n)}_{\substack{= o((x - a)^{2n}) = o((x - a)^n) \\ \text{(xiii) 1.2}}} \\ &= \tau_n(PQ)(x - a) + o((x - a)^n) \end{aligned}$$

puisque les $(x - a)^k$, $k > n$, qui apparaissent éventuellement dans PQ sont des $o((x - a)^n)$. $\square$

Proposition 1.15. Soient f admettant un $DL_n(b)$ de partie régulière P , et g admettant un $DL_n(a)$ de partie régulière Q . Si $g(a) = b$, $f \circ g$ admet $DL_n(a)$ de partie régulière $\tau_n(P \circ \bar{Q})$ où $\bar{Q} = Q - Q(0)$.

Démonstration. On a $f \circ g(x) = P(g(x) - b) + o((g(x) - b)^n)$ en a . On note $P = \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k (x - a)^k$. Comme $Q(0) = g(a) = b$,

$$P(g(x) - b) = P(\bar{Q}(x - a) + o((x - a)^n)) = \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k (\bar{Q}(x - a) + o((x - a)^n))^k.$$

Par la formule du binôme de Newton, (xiii) et 1.2, on a $(\bar{Q}(x - a) + o((x - a)^n))^k = \bar{Q}(x - a)^k + o((x - a)^n)$ pour tous $0 \leq k \leq n$. Ainsi $P(g(x) - b) = P(\bar{Q}(x - a)) + o((x - a)^n)$. On traite $o((g(x) - b)^n) = o((g(x) - g(a))^n)$ de deux manières. Si g est $\mathcal{C}^1$ localement, on conclut par 1.4 et (xiii). Sinon,

$$(g(x) - g(a))^n = (\bar{Q}(x - a) + o((x - a)^n))^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \bar{Q}(x - a)^k o((x - a)^{n-k}).$$

Si $k < n$, $o((x - a)^{n-k}) = o((x - a)^n)$ par 1.2, donc $\bar{Q}(x - a)^k o((x - a)^{n-k}) = o((x - a)^n)$ par (xiii). Si $k = n$, comme il existe un polynôme R tel que $\bar{Q} = XR$, on a $\bar{Q}(x - a)^n = (x - a)^n R(x - a)^n$. Ainsi on a bien $o((g(x) - g(a))^n) = o((x - a)^n)$ (encore par (xiii)). $\square$

Proposition 1.16 (Primitivation). Soit f localement dérivable telle que f' admette un $DL_n(a)$ de partie régulière $P = \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k X^k$. Alors f admet un $DL_{n+1}(a)$ donnée par

$$f(x) = f(a) + \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{\alpha_k}{k+1} (x - a)^{k+1} + o((x - a)^{n+1}).$$

⚠ Attention : f dérivable admet un $DL_n(a) \not\Rightarrow f'$ admet un $DL_{n-1}(0)$, cf encore $f(x) = x^3 \sin(1/x)$.

Démonstration. Il existe une fonction ε de limite nulle en a telle qu'au voisinage de a ,

$$f'(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k (x - a)^k + \varepsilon(x)(x - a)^n.$$

Cas f localement $\mathcal{C}^1$. La fonction $x \mapsto \varepsilon(x)(x - a)^n$ est localement continue en tant que différence de telles fonctions et on peut intégrer :

$$f(x) = f(a) + \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{\alpha_k}{k+1} (x - a)^{k+1} + \int_a^x \varepsilon(t)(t - a)^n dt.$$

Soit $\delta > 0$, alors au voisinage de a on a $|\varepsilon| \leq (n+1)\delta$ et

$$\left| \int_a^x \varepsilon(t)(t - a)^n dt \right| \leq \int_a^x |\varepsilon(t)| |t - a|^n dt \leq (n+1)\delta \int_a^x |t - a|^n dt$$

Comme $|t - a|^n$ est de signe constant sur l'intervalle d'intégration, on obtient

$$\int_a^x |t - a|^n dt = \frac{1}{n+1} |x - a|^{n+1}$$

et on peut conclure :

$$\int_a^x \varepsilon(t)(t - a)^n dt = o((x - a)^{n+1}).$$

Cas général. Soit $Q = f(a) + \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{\alpha_k}{k+1} X^{k+1}$ et $g : x \mapsto f(x) - Q(x - a)$ si bien que $g(a) = 0$ et $\exists g'(x) = \varepsilon(x)(x - a)^n$. Soit $\delta > 0$, sur un voisinage de a on a $|\varepsilon| < \delta$, donc par le théorème des accroissements finis on a sur ce voisinage $|g(x)| \leq \delta |x - a|^{n+1}$ comme souhaité. $\square$

Théorème 1.17 (Taylor-Young). Soit f une fonction $n - 1$ fois dérivable au voisinage de a , et n fois dérivable en a . Alors f admet un $DL_n(a)$ donné par

$$f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

Remarque 1.18. Le fait d'être n fois dérivable sous-tend implicitement la $n - 1$ dérivabilité locale de manière à ce que le taux d'accroissement de $f^{(n-1)}$ ait un sens.

Démonstration. Par récurrence sur n , les cas $n = 0, 1$ étant déjà connus. Si f est $n \geq 1$ fois dérivable en a , alors f' l'est $n - 1$ fois donc par hypothèse de récurrence

$$f'(x) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^k + o((x-a)^{n-1}).$$

On conclut par primitivation. □

Remarque 1.19 (Taylor avec reste intégral). Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ on peut expliciter le o . On peut montrer par récurrence en utilisant une intégration par parties que

$$f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

1.3 Allure locale d'une courbe paramétrée plane

Définition 1.20. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On appelle *courbe paramétrée* l'ensemble $\{M(t) := (x(t), y(t)) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$.

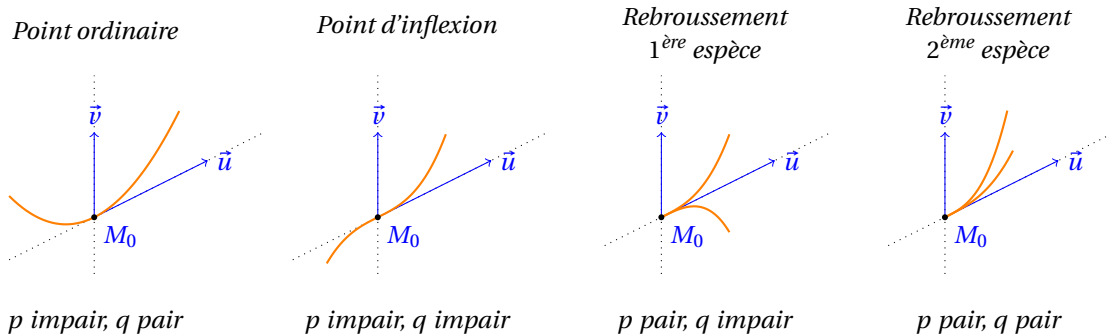
Remarque 1.21. Si $x(t) = t$ on retrouve le graphe de y .

Notation 1.22.

- (i) Soit la courbe paramétrée associée à $x, y \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On dispose donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t))$.
- (ii) On fixe ensuite $t_0 \in I$, et $M_0 = M(t_0)$. Le point M_0 est dit *stationnaire* si $\overrightarrow{OM}'(t_0) = \vec{0}$. En général, on introduit
 - p le plus petit entier $k \geq 1$ (s'il existe) tel que $\overrightarrow{OM}^{(k)}(t_0) \neq \vec{0}$, et $\vec{u} = (1/p!) \overrightarrow{OM}^{(p)}(t_0)$;
 - q le plus petit entier $k \geq p + 1$ (s'il existe) tel que $\overrightarrow{OM}^{(k)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$, et $\vec{v} = (1/q!) \overrightarrow{OM}^{(q)}(t_0)$.

On dispose donc d'un *repère local* $(M_0, \vec{u}, \vec{v})$, non orthonormé direct en général.

Proposition 1.23. L'allure locale de la courbe paramétrée en M_0 est donnée par l'un des quatre cas suivants :



Remarque 1.24. Si $x(t) = t$, $p = 1$ pour tous t_0 : il n'y a pas de point stationnaire, et donc jamais de rebroussement. En général cependant, un point peut être stationnaire et ordinaire ou d'inflexion.

Démonstration. On applique conjointement Taylor-Young à l'ordre q à x et y . Si $h = t - t_0$, on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{0 \leq k \leq q} \frac{h^k}{k!} \overrightarrow{OM}^{(k)}(t_0) + h^q (\epsilon_1(h), \epsilon_2(h))$$

où $\epsilon_i \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Par définition de p , la somme commence en fait à $k = p$. On sait par définition de q que pour tous $p \leq k \leq q-1$ il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que $(1/k!) \overrightarrow{OM}^{(k)}(t_0) = \alpha_k \overrightarrow{u}$, avec $\alpha_p = 1$. Ainsi,

$$\overrightarrow{M_0 M}(t) = \overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM}(t_0) = \left(\sum_{p \leq k \leq q-1} \alpha_k h^k \right) \overrightarrow{u} + h^q \overrightarrow{v} + h^q (\epsilon_1(h), \epsilon_2(h)).$$

On sait aussi qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ telles que $(1, 0) = a \overrightarrow{u} + b \overrightarrow{v}$ et $(0, 1) = c \overrightarrow{u} + d \overrightarrow{v}$. Ainsi en posant $\bar{\epsilon}_1 = a\epsilon_1 + c\epsilon_2$ et $\bar{\epsilon}_2 = b\epsilon_1 + d\epsilon_2$, on obtient

$$\overrightarrow{M_0 M}(t) = \underbrace{\left(\sum_{p \leq k \leq q-1} \alpha_k h^k + \bar{\epsilon}_1(h) h^q \right)}_{=: X(h)} \overrightarrow{u} + \underbrace{(h^q + \bar{\epsilon}_2(h) h^q)}_{=: Y(h)} \overrightarrow{v}$$

avec $\bar{\epsilon}_i \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Comme $\alpha_p = 1$, $X(h) \sim h^p$ et $Y(h) \sim h^q$ an 0. La pente dans le repère local, donnée par $Y(h)/X(h)$, tend donc vers 0 en 0 puisque $q > p$. Ainsi en M_0 la courbe est tangente à $\overrightarrow{u}$. La position relative est ensuite donnée par la parité de p et q , puisqu'elles déterminent si X et Y changent de signe. $\square$

2 Équations différentielles linéaires

Définition 2.1. Une équation différentielle linéaire d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est une équation de la forme

$$(\mathcal{E}) : \sum_{0 \leq k \leq n} a_k y^{(k)} = b$$

de coefficients $a_k \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, de second membre $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle réel, et d'inconnue y . L'équation est dite *normalisée* ou *résolue* si $a_n = 1$, *homogène* si $b = 0$. Une *solution* de $(\mathcal{E})$ est une fonction y qui est n fois dérivable sur un intervalle $J \subseteq I$ telle que

$$\forall x \in J, \sum_{0 \leq k \leq n} a_k(x) y^{(k)}(x) = b(x).$$

Une telle solution est dite *maximale* si elle n'est la restriction d'aucune solution définie sur un intervalle K tel que $J \subsetneq K \subseteq I$.

Ici on traitera seulement les équations résolues, à l'ordre 1, et à l'ordre 2 quand les coefficients sont constants et pour certains seconds membres. Dans ces cas on verra que toutes les solutions sont maximales.

2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On traite déjà le cas homogène.

Proposition 2.2. Soit I un intervalle réel, et $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ une primitive quelconque de a , puis $y_0 = e^{-A}$. L'ensemble des solutions maximales de $y' + ay = 0$ est la droite vectorielle engendrée par y_0 :

$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda y_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

En particulier $\mathcal{S}_0$ est stable par addition et multiplication par un scalaire.

Démonstration. Une fonction y dérivable sur $J \subseteq I$ est solution si et seulement si la dérivée de yy_0^{-1} est nulle, ce qui équivaut à l'existence d'une constante λ telle que $y = \lambda y_0$. En particulier les solutions maximales sont définies sur I . $\square$

On passe au cas inhomogène quelconque.

Proposition 2.3. Soit I un intervalle réel, et $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ une primitive quelconque de a , $\Lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ une primitive quelconque de be^A , puis $y_p = \Lambda e^{-A}$. Soit $y_0 \in \mathcal{S}_0$ une solution quelconque de l'équation homogène $y' + ay = 0$. L'ensemble des solutions maximales de $y' + ay = b$ est la droite affine dirigée par y_0 et passant par y_p :

$$\mathcal{S} = \{y_p + \lambda y_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

En particulier, pour tous $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ on a

$$y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_0, \quad y_1 + y_0 \in \mathcal{S}.$$

Démonstration. On a $y'_p = b - ay_p$ donc $y_p \in \mathcal{S}$. Ensuite une fonction y dérivable sur $J \subseteq I$ est solution de $y' + ay = b$ si et seulement si $y' = y'_p$, ce qui équivaut à $y - y_p$ solution de l'équation homogène et on peut conclure par 2.2. $\square$

Remarque 2.4. On passe d'une solution de l'équation homogène $y_0 = \lambda e^{-A}$ à une solution dite *particulière* $y_p = \Lambda e^{-A}$ en faisant "varier la constante" λ . Le calcul de Λ comme primitive de be^A est donc appelé méthode de *variation de la constante*, qui a le mérite d'être constructive et donc explicite.

Quand le second membre est une somme, le principe de superposition, dont la preuve est immédiate, permet aussi de trouver des solutions particulières.

Proposition 2.5. Soit I un intervalle réel, et $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soient y_1, y_2 des solutions de $y' + ay = b_1$ et $y' + ay = b_2$ respectivement. Alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $y' + ay = b_1 + b_2$.

On peut sélectionner une solution de la droite affine en imposant une "condition initiale", c'est-à-dire un point de son graphe.

Définition 2.6. On appelle *courbe intégrale* le graphe d'une solution d'une équation différentielle donnée.

Proposition 2.7 (Problème de Cauchy). Soit I un intervalle réel, et $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution de $y' + ay = b$ dont la courbe intégrale passe par (x_0, y_0) , ie telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration. Soit A une primitive de a et y_p une solution particulière. Alors une solution $y = y_p + \lambda e^{-A}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, satisfait $y(x_0) = y_0$ si et seulement si $\lambda = e^{A(x_0)}(y_0 - y_p(x_0))$ d'où le résultat. $\square$

Remarque 2.8 (Équations non résolues). Si on s'intéresse à une équation $\alpha y' + ay = b$ on peut toujours se ramener au cas résolu sur les intervalles où α ne s'annule pas, simplement en divisant par α . En un point x_0 d'annulation de α on a alors un problème de *recollement* : peut-on trouver une fonction y définie au voisinage de x_0 qui soit solution à gauche et à droite de x_0 , et qui soit dérivable en x_0 ? On verra en TD qu'il n'y a pas de réponse universelle à ce problème.

2.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 2.9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle réel. Le *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ est le polynôme $X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$.

Le cas homogène se résout suivant le signe du discriminant Δ du polynôme caractéristique. Le cas $\Delta < 0$ va nécessiter l'usage des nombres complexes.

Remarque 2.10 (Aparté : dérivée d'une fonction à valeurs complexes). On dit qu'une fonction $z : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle réel est dérivable en $t_0 \in I$ si les fonctions $\Re z := \Re \circ z$ et $\Im z := \Im \circ z : I \rightarrow \mathbb{R}$ le sont, auquel cas on définit sa dérivée par $z'(t_0) = (\Re z)'(t_0) + i(\Im z)'(t_0)$. Si on définit les limites sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ coordonnée par coordonnée, c'est équivalent à l'existence d'une dérivée comme limite en t_0 du taux d'accroissement $t \mapsto \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$. Les règles de calcul de dérivées (somme, produit, composition) connues pour les fonctions à valeurs réelles restent alors vraies dans ce cadre. Par exemple, considérons la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$. Elle est dérivable de dérivée

$$z'(t) = -\sin(t) + i \cos(t) = i e^{it}.$$

Plus généralement (exercice), pour tout $\alpha = x + iy \in \mathbb{C}$, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = e^{\alpha t} = e^{xt} (\cos(yt) + i \sin(yt))$ est dérivable de dérivée $z' = \alpha z$.

Il devient dès lors légitime de différencier les solutions à valeurs réelles ou complexes d'une équation différentielle donnée. Le lemme suivant établit un lien entre ces cas.

Lemme 2.11. Soit

$$(\mathcal{E}) : \sum_{0 \leq k \leq n} a_k y^{(k)} = b + ic$$

une équation différentielle linéaire d'ordre $n \in \mathbb{N}$, où $a_k, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Alors z à valeurs complexes est solution si et seulement si $\Re z$ et $\Im z$ sont des solutions à valeurs réelles de $\sum_{0 \leq k \leq n} a_k y^{(k)} = b$ et $\sum_{0 \leq k \leq n} a_k y^{(k)} = c$ respectivement.

Démonstration. On a z solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\sum_{0 \leq k \leq n} a_k (\Re z)^{(k)} + i \sum_{0 \leq k \leq n} a_k (\Im z)^{(k)} = b + ic$$

et on conclut en identifiant parties réelles et imaginaires grâce au fait que les fonctions a_k, b et c sont à valeurs réelles. $\square$

Proposition 2.12. Soit $\chi = X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ et Δ son discriminant. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales à valeurs réelles de $(\mathcal{E}) : y'' + ay' + by = 0$.

(i) Si $\Delta > 0$, soient r_- et r_+ les deux racines réelles distinctes de χ . On a

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda e^{r_- t} + \mu e^{r_+ t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(ii) Si $\Delta = 0$, soit r la racine réelle double de χ . On a

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{rt} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(iii) Si $\Delta < 0$, soient $\rho - i\omega$ et $\rho + i\omega$ les deux racines complexes conjuguées distinctes de χ . On a

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto e^{\rho t} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Remarque 2.13. Dans tous les cas $\mathcal{S}$ est un plan réel, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel réel de dimension 2 de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fois dérivable, puis $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $z(t) = y(t) e^{-rt}$ pour $r \in \mathbb{C}$ donné. Un rapide calcul montre que

$$y'' + ay' + cy = (z'' + (2r + a)z' + \chi(r)z) e^{rt}$$

où l'on remarque que $2r + a$ est une racine complexe de Δ . Ainsi si r est choisi racine de P , y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si la dérivée de $t \mapsto z'(t) e^{(2r+a)t}$ est nulle, ce qui équivaut à l'existence de $\mu \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t) e^{(2r+a)t} = \mu$. Si $\Delta = 0$ on a $2r + a = 0$, et donc

$$y \text{ solution} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (\lambda + \mu t) e^{rt},$$

et comme dans ce cas $r \in \mathbb{R}$, y est à valeurs réelles si et seulement si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ce qui prouve le cas (ii). Si $\Delta \neq 0$,

$$\begin{aligned} y \text{ solution} &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \left(\lambda + \underbrace{\frac{-\mu}{2r+a}}_{=: \bar{\mu}} e^{-(2r+a)t} \right) e^{rt} \\ &\iff \exists \lambda, \bar{\mu} \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{rt} + \bar{\mu} e^{-(r+a)t}. \end{aligned}$$

Si $\Delta > 0$, on a $r_{\pm} + a = r_{\mp}$ dans $\mathbb{R}$ et à nouveau y est à valeurs réelles si et seulement si λ et $\bar{\mu}$ sont elles-mêmes réelles, ce qui traite le cas (i). Si $\Delta < 0$, on note $r = \rho - i\omega$ où $2\rho = -a$, donc $-r - a = \rho + i\omega$. Mais alors si y est une solution réelle, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \Re \left(\lambda e^{(\rho-i\omega)t} + \bar{\mu} e^{(\rho+i\omega)t} \right) = e^{\rho t} (\eta \cos(\omega t) + \nu \sin(\omega t))$$

avec $\eta = \Re(\lambda) + \Re(\bar{\mu})$ et $\nu = \Im(\lambda) - \Im(\bar{\mu})$. Réciproquement s'il existe $\eta, \nu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $y(t) = e^{\rho t} (\eta \cos(\omega t) + \nu \sin(\omega t))$, alors $y(t) = \Re(\lambda e^{(\rho-i\omega)t})$ avec $\lambda = \eta + i\nu$ et donc y est bien solution par 2.11 (cas homogène) vu que $z : t \mapsto \lambda e^{(\rho-i\omega)t}$ est une solution complexe par ce qui précède. On a bien (iii). $\square$

Dans le cas inhomogène la structure de l'espace des solutions est celle d'un plan affine.

Proposition 2.14. Soit y_p une solution particulière de $(\mathcal{E}) : y'' + ay' + by = c$. Alors l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$ est donné par

$$\mathcal{S} = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\}$$

où $\mathcal{S}_0$ est le plan vectoriel des solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + b = 0$.

Démonstration. En effet y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $y - y_p$ est solution de l'équation homogène associée. $\square$

Il existe un analogue de la méthode de la variation de la constante qui permet de prouver l'existence de solutions particulières dans notre cadre (et donc la non vacuité de l'espace des solutions). Soit une équation $(\mathcal{E}) : y'' + ay' + by = c$. L'espace des solutions de l'équation homogène associée peut toujours s'écrire $\mathcal{S}_0 = \{\lambda y_1 + \mu y_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ pour une paire de fonctions solutions (y_1, y_2) (appelée *base* du plan $\mathcal{S}_0$).

Proposition 2.15. Il existe une solution particulière y_p de $(\mathcal{E})$ de la forme $y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$ où λ et μ sont des fonctions réelles deux fois dérivables satisfaisant $(h) : \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0$.

Démonstration. En supposant (h) on a $y_p' = \lambda y_1' + \mu y_2'$, puis $y_p'' = \lambda y_1'' + \mu y_2'' + \lambda' y_1' + \mu' y_2'$, si bien que y_p est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\lambda' y_1' + \mu' y_2' = c$. Avec (h) on obtient donc un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues λ', μ' :

$$\begin{cases} y_1 \lambda' + y_2 \mu' = 0 \\ y_1' \lambda' + y_2' \mu' = c \end{cases}$$

de déterminant $w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ appelé *wronskien*. On peut vérifier que dans les trois cas (i, ii, iii)

de 2.12 il existe une constante non nulle $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(y_1, y_2)(t) = \alpha e^{-at}$. La formule donnant l'inverse d'une matrice carrée de taille 2 donne alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda'(t) = -\alpha^{-1} e^{at} y_2(t) c(t) \quad \text{et} \quad \mu'(t) = \alpha^{-1} e^{at} y_1(t) c(t)$$

et il suffit de choisir des primitives pour conclure. $\square$

En fait cette méthode se généralise à tout ordre en utilisant les systèmes différentiels et l'exponentielle de matrices, mais elle n'est pas toujours facile à utiliser dans la pratique. On va se concentrer sur des seconds membres de type bien précis, mais très présents en physique.

Exemple 2.16. On considère $(\mathcal{E}) : y'' + ay' + by = c$ de polynôme caractéristique χ .

- Si $c(t) = P(t)e^{\alpha t}$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une (unique) solution particulière de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ satisfaisant
 - ▷ $\deg(Q) = \deg(P)$ si $\chi(\alpha) \neq 0$;
 - ▷ $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ et $Q(0) = 0$ si α est racine simple de χ ;
 - ▷ $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ et $Q(0) = 0 = Q'(0)$ si α est racine double de χ .

En effet on peut calculer

$$(Q(t)e^{\alpha t})'' + a(Q(t)e^{\alpha t})' + bQ(t)e^{\alpha t} = e^{\alpha t} (Q''(t) + \chi'(\alpha)Q'(t) + \chi(\alpha)Q(t))$$

et un argument d'algèbre linéaire (voir L2) permet de conclure. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ donné par $u(Q) = Q'' + \chi'(\alpha)Q' + \chi(\alpha)Q$, et $\mathbb{R}[X]_n$ le sous-espace des polynômes de degré $\leq n$.

- ▷ si $\chi(\alpha) \neq 0$, le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]_n$ induit par u a un noyau nul, et est donc surjectif;
- ▷ si $\chi(\alpha) = 0 \neq \chi'(\alpha)$, le noyau de l'application linéaire $\mathbb{R}[X]_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}[X]_n$ est la droite $\mathbb{R}[X]_0$ des polynômes constants, et est donc surjective et on peut choisir la valeur en 0 dans chaque fibre;

- ▷ si $\chi(\alpha) = 0 = \chi'(\alpha)$, le noyau de l'application linéaire $\mathbb{R}[X]_{n+2} \rightarrow \mathbb{R}[X]_n$ est le plan $\mathbb{R}[X]_1$ des polynômes affines, et est donc surjective et on peut choisir dans chaque fibre les valeurs en 0 de l'antécédent et de sa dérivée.
- Si $c(t) = P(t)e^{\beta t} \cos(\omega t)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\beta, \omega \in \mathbb{R}$, on commence par trouver une solution particulière de la version “complexifiée”

$$y'' + ay' + by = P(t)e^{\alpha t}$$

avec $\alpha = \beta + i\omega$ en appliquant la méthode précédente (les mêmes arguments sont valables sur $\mathbb{C}$), puis en prenant la partie réelle grâce à 2.11. S'il y a un sin à la place du cos, prendre la partie imaginaire.

- Si $c(t)$ est une somme des cas précédents on utilise le principe de superposition 2.5.

Proposition 2.17 (Problème de Cauchy). *Soit I un intervalle réel, $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution de $y'' + ay' + by = c$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = v_0$.*

Démonstration. Soit y_p une solution particulière et $\alpha = y_0 - y_p(x_0)$, $\beta = v_0 - y'_p(x_0)$, si bien que $y = y_0 + y_p$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si y_0 est solution de l'équation homogène et $y_0(x_0) = \alpha$, $y'_0(x_0) = \beta$. Soit à nouveau $\mathcal{S}_0 = \{\lambda y_1 + \mu y_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ pour une base (y_1, y_2) du plan $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène. Alors $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

On conclut alors à nouveau parce que le wronskien est non nul dans tous les cas. □