

Fondements d'Analyse
Exercices supplémentaires

Exercice 1. Dans la théorie de la relativité, l'énergie cinétique $\mathcal{E}$ d'un point matériel de masse inerte m se déplaçant à une vitesse v dans un référentiel donné vaut :

$$\mathcal{E} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} m v^2 \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Le coefficient γ est le facteur de Lorentz, c est la vitesse de la lumière. Dans les cas non relativistes, c'est-à-dire lorsque la vitesse du point est négligeable devant la vitesse de la lumière, donner le développement limité de l'énergie cinétique $\mathcal{E}$ à l'ordre 4 en $\frac{1}{c} \rightarrow 0$. On considèrera v comme une constante.

Exercice 2. Étudier la courbe paramétrée par $(x(t) = \ln(\tan(t/2)) + \cos(t), y(t) = \sin(t))$, $t \in]0, \pi[$, en particulier les points stationnaires.

Exercice 3. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + i y'$, résoudre ce système différentiel avec conditions initiales $x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 0$ et $x'(0) = \omega, y'(0) = 0, z'(0) = 1$.

Exercice 4. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

pour tous $x \neq -1, 0$ puis résoudre

$$x(x+1)y' + y = 2x(x+1)^2$$

sur $]0, +\infty[,]-1, +\infty[,]-\infty, 0[$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Trouver la solution de $y'' - 4y' + 5y = 3\cos(x)e^{2x} - \sin(2x)e^{2x}$ satisfaisant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6. Trouver la solution de $y'' - 4y' + 4y = 2xe^{2x}$ satisfaisant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 7. Dédurre le DL(0) à l'ordre 4 de $\cos$ du fait que ce soit la solution de $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 8. En utilisant le changement de variable $x = \tan(t)$, résoudre

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$$

avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.