

Décomposition de Dunford : méthode de Newton
Devoir Maison

Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique nulle (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ de polynôme minimal μ . Pour toute paire P, Q de polynômes on note $P \wedge Q$ leur pgcd.

1. Soit $h \in \mathbb{k}[X]$. Montrer que $h(A)$ est inversible si et seulement si $\mu \wedge h = 1$.
2. En déduire que si $h(A)$ est inversible, alors $h(A)^{-1} \in \mathbb{k}[A] := \{P(A) \mid P \in \mathbb{k}[X]\}$.
3. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ nilpotente. Montrer que $I_n - B$ est inversible.
4. Supposons $h \wedge h' = 1$ et $h(A)$ nilpotent. Montrer que $h'(A)$ est inversible.
5. Soit $P \in \mathbb{k}[X]$. Montrer qu'il existe $S \in \mathbb{k}[X]$ tel que

$$P(A + h(A)) = P(A) + h(A)P'(A) + h(A)^2 S(A).$$

6. On suppose χ_A scindé et on considère P le polynôme simplement scindé de racines les valeurs propres de A . Montrer que $P(A)$ est nilpotente et que $P \wedge P' = 1$.
7. On définit par récurrence $A_0 = A$ puis $A_{k+1} = A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1}$. Montrer que cette suite est bien définie en prouvant que pour tout $k \geq 0$ on a
 - (a) $A_k \in \mathbb{k}[A]$;
 - (b) $P(A)^{2^k}$ divise $P(A_k)$;
 - (c) $P'(A_k)$ inversible.
8. Montrer que la suite $(A_k)_{k \geq 0}$ stagne, de limite la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford de A .