UNIVERSITÉ D'ANGERS
L3

Continuité de la décomposition de Dunford
Devoir Maison

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{D}_n \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables. Soit $f\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'application (non linéaire!) qui à une matrice associe la partie nilpotente de sa décomposition de Dunford. On se propose d'étudier le lieu où f est continue.

1. (a) Montrer que $\mathscr{D}_n$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   Indice : si M est triangulaire, considérer $M + \operatorname{diag}(\epsilon, 2\epsilon, \dots, n\epsilon)$ où $0 < n\epsilon < \min\{|\lambda - \mu| \mid \lambda \neq \mu \in \operatorname{Spec}(M)\}$.
   (b) Décrire l'intérieur $\mathring{\mathscr{D}}_n$ de $\mathscr{D}_n$.
   (c) Montrer que f est continue sur cet intérieur.
   (d) À l'aide de la densité de $\mathscr{D}_n$, établir que f n'est pas continue en une matrice non diagonalisable.
2. Reste à savoir si f est continue sur $\mathscr{D}_n \setminus \mathring{\mathscr{D}}_n$. On traite d'abord le cas $n = 2$.
   (a) Vérifier que si f est continue en 0, elle est continue partout.
   (b) Montrer que si $D + N$ est une décomposition de Dunford où $N \neq 0$, alors D est une homothétie.
   (c) En déduire que si une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$, alors $f(M_k) \to 0$.
   (d) Conclure quant au lieu de continuité de f quand $n = 2$.
3. Dans le reste du problème on suppose $n = 3$.
   (a) Pour $\epsilon \neq 0$, calculer la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} \epsilon^2 & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Indice : calculer une matrice de passage P_ϵ adaptée à $\ker((M_\epsilon - \epsilon^2)^2) \oplus \ker(M)$.
   (b) En déduire que si $n = 3$, f n'est pas continue en 0.
4. Soient $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C}$ et $D \in \mathscr{D}_3(\mathbb{C})$ telle que $\chi_D = (X - \alpha)^2(X - \beta)$. Supposons qu'une suite de décompositions de Dunford $M_k = D_k + N_k$ tende vers D quand $k \to +\infty$, et que les N_k sont non nulles.
   (a) Démontrer que pour k assez grand, chaque D_k a un spectre de la forme $(\alpha_k, \alpha_k, \beta_k)$ où $\alpha_k \neq \beta_k$, et $(\alpha_k)_k$ et $(\beta_k)_k$ ont pour limites respectives α et β.
   (b) Si $\mathbb{C}^3$ est muni de son produit hermitien standard, montrer qu'on peut diagonaliser D_k dans une base (u_k, v_k, w_k) formée de vecteurs de norme 1 et avec la condition supplémentaire $\langle u_k | v_k \rangle = 0$.
   (c) Si $\mathbb{S}$ est la sphère unité de $\mathbb{C}^3$, montrer que toute valeur d'adhérence de la suite (u_k, v_k, w_k) dans $\mathbb{S}^3$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
   Remarque : dans la question 3(a) si on choisit $P_\epsilon \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})[\epsilon]$ de degré 2, quelle est sa limite quand $\epsilon \to 0$?
   (d) En déduire que toute sous-suite convergente de $(N_k)_k$ admet comme limite 0.
   (e) Démontrer que f est continue en D.
   (f) Conclure quant au lieu de continuité de f quand $n = 3$.
5. Pour n quelconque, conjecturer le lieu de continuité de f.