

Polynômes orthogonaux et interpolation
Devoir Maison

Soit n un entier strictement positif et (a_0, \dots, a_n) une famille de $n + 1$ réels distincts. On note $E = \mathbb{R}[X]_n$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on introduit le moment $\mu_j = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k^j$ puis

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} & \mu_k \\ \mu_1 & & \ddots & \ddots & \mu_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{k-1} & \ddots & \ddots & & \mu_{2k-1} \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \cdots & \mu_{2k-1} & \mu_{2k} \end{pmatrix}$$

pour tout $0 \leq k \leq n$.

1. Soit

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

la matrice de Vandermonde associée à (a_0, \dots, a_n) , que l'on rappelle inversible. Calculer ${}^t V V$ et en déduire que $\Delta_k \neq 0$.

2. Soit

$$P_k = \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} & \mu_k \\ \mu_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \cdots & \mu_{2k-1} \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^k \end{pmatrix}$$

pour tous $0 \leq k \leq n$, avec la convention $P_0 = 1$. Montrer que P_k définit un polynôme de degré k . Donner son coefficient dominant en fonction des données précédentes (un déterminant qu'on ne calculera pas).

3. On définit une forme bilinéaire symétrique $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{0 \leq k \leq n} P(a_k) Q(a_k)$$

pour tous $P, Q \in E$. Montrer qu'elle est définie positive sur E .

4. Montrer que pour tout $0 \leq \ell < k \leq n$ on a $\langle P_k, X^\ell \rangle = 0$.

5. En déduire que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ définit une base orthogonale échelonnée de E .

6. Montrer que $\|P_k\|^2 = \Delta_{k-1} \Delta_k$ pour tous $1 \leq k \leq n$.

7. Soient P, Q deux polynômes de degrés $\leq n - 1$. Montrer que $\langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle$.

8. Soit $\bar{P}_k = P_k / \Delta_{k-1}$ pour tous $1 \leq k \leq n$, de sorte que \bar{P}_k est de coefficient dominant 1. Montrer que pour tous $0 \leq \ell < k - 1 < n - 1$ on a

$$\langle X\bar{P}_k - \bar{P}_{k+1}, P_\ell \rangle = 0.$$

9. D'après ce qui précède, pour tous $1 \leq k \leq n - 1$, il existe donc des réels b_k, c_k tels que

$$X\bar{P}_k = b_k \bar{P}_{k-1} + c_k \bar{P}_k + \bar{P}_{k+1}.$$

Montrer que $b_k = \|\bar{P}_k\|^2 / \|\bar{P}_{k-1}\|^2$.

10. Montrer par récurrence que le polynôme caractéristique de la matrice

$$J_k = \begin{pmatrix} c_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & c_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k-1} & c_{k-1} \end{pmatrix}$$

est donné par \bar{P}_k .

11. Soit λ une racine de P_k . Montrer que le vecteur ${}^t(\bar{P}_0(\lambda), \dots, \bar{P}_{k-1}(\lambda))$ est propre pour J_k .
12. Montrer que J_k est semblable à une matrice symétrique en utilisant la matrice de passage $\text{diag}(\|\bar{P}_k\|)$.
13. En déduire que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de J_k , on a

$$\sum_{0 \leq j \leq k-1} \bar{P}_j(\lambda) \bar{P}_j(\mu) = 0.$$

14. On considère les polynômes interpolateurs de Lagrange $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ définis par

$$L_k = \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq k}} \frac{X - a_\ell}{a_k - a_\ell}.$$

Montrer que $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle -, - \rangle$.

15. Donner le coefficient $Q_{i,j}$ de la matrice de passage Q de $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ à $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ en fonction de P_j et a_i . Pour tous $0 \leq i, j \leq n$, quelle est la valeur de

$$\sum_{0 \leq k \leq n} P_k(a_i) P_k(a_j) ?$$