

Systèmes de vote

Oriane Lechat & Étienne Mann & Julie Sorin

Université d'Angers



Introduction

Le 7 mai 2017, Emmanuel Macron était élu président de la République française au suffrage universel direct. Pour la première fois dans l'histoire de la V^{ème} république, un candidat issu d'un parti politique "centriste" était élu.

1. Était-ce le souhait des français ou le système de vote actuel (système majoritaire à deux tours) favorise-t-il ces candidats ?
2. Le résultat aurait-il été identique avec un système de vote différent ?

Pour tenter de répondre à ces questions, nous présenterons quelques systèmes de vote à l'aide d'un exemple précis.

Dans un second temps, nous mathématiserons le sujet et nous citerons les principaux résultats démontrés à ce jour, à savoir le Paradoxe d'Arrow et les théorèmes de Gibbard-Satterthwaite.

Trois systèmes de vote

1 Vote par classement

On demande de classer les candidats par ordre de préférence, avec 5 candidats, il y a 120 possibilités. On va simplifier en supposant qu'on ait seulement 6 choix.

% des votes candidats	FI	PS	LRM	LR	FN
33%	4	5	3	2	1
22%	4	1	2	3	5
18%	1	2	3	4	5
16%	2	3	4	1	5
7%	4	2	1	3	5
4%	2	4	1	3	5

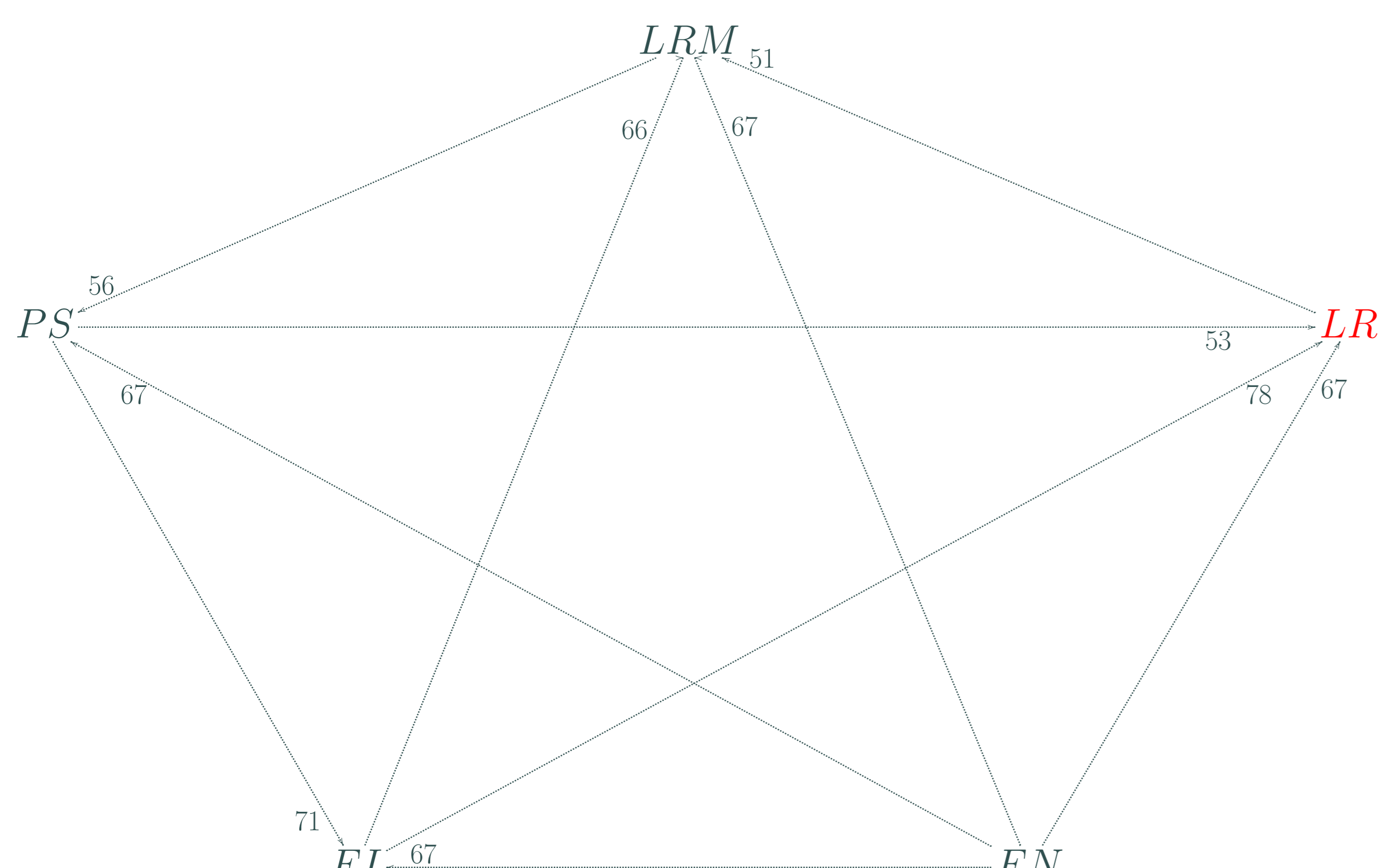
Méthode Borda : Le gagnant est celui qui a le moins de point, ici c'est LR qui gagne.

Méthode alternative : On supprime le candidat qui est le moins de fois premier: ici c'est LRM qui à 11% de vote en première position qui est éliminé. Après on recommence jusqu'à n'avoir qu'un seul vainqueur...dans ce cas c'est FI qui gagne.

2 Vote de Condorcet

La méthode de Condorcet est une des plus anciennes méthodes de vote, elle date du VIII^{ème} siècle. Cette méthode consiste à comparer tous les candidats en duels. En utilisant les résultats précédents, on obtient le diagramme de préférences binaires ci-dessous où :

1. Chaque candidat est représenté par une position distincte.
2. Entre chaque paire de candidats, il y a une flèche qui pointe vers celui des deux qui serait vainqueur en face-à-face.
3. Sur chaque flèche, on indique le score (en pourcentage) par lequel le vainqueur du face-à-face concerné gagne.



Dans cette situation, aucun des cinq candidats bat les quatre autres en duel, on n'a donc pas de vainqueur de Condorcet. On se retrouve dans le cas du paradoxe de Condorcet. Pour résoudre ce paradoxe et déterminer un vainqueur, on choisit le candidat qui a le moins perdu lors de sa plus mauvaise confrontation. Ici c'est LR qui serait vainqueur car il a perdu un duel avec 49% des voix.

3 Vote par valeurs

Cette méthode consiste à évaluer chaque candidat en lui donnant une note entre -2 et 2. Ensuite on calcule la somme des notes obtenues par chaque candidat, celui ayant obtenu le plus grand score est déclaré vainqueur. L'intérêt par rapport aux classements, est qu'il est possible de mettre la même note à deux candidats.

En se basant sur notre exemple de départ, nous pourrions supposer qu'avec la méthode de vote par valeurs, nous obtiendrions les résultats suivants :

% des votes candidats	FI	PS	LRM	LR	FN
33%	0	-1	1	1	2
22%	0	1	1	0	-2
18%	2	2	0	-1	-1
16%	0	-1	-1	1	-1
7%	-1	2	2	1	-2
4%	1	0	2	0	-2
Score	33	23	61	38	-34

Avec cette méthode, c'est LRM qui remporterait l'élection.

Manipulation de vote

On distingue trois façons de manipuler le vote :

1. **le vote utile** : vote que l'on considère comme le plus efficace pour vaincre un candidat que l'on ne souhaite pas voir élire (Il ne tient pas nécessairement compte des convictions politiques profondes des électeurs).
2. **le vote stratégique** : on ne vote pas selon ses convictions mais on exploite les failles du système pour aider son candidat.
3. **le vote contestataire** : la tendance d'une partie des électeurs (ou des votants) à contester ou à exprimer un mécontentement en votant pour quelqu'un d'autre que les partis dont ils auraient pu se sentir proches.

Par exemple, le système de vote de Condorcet est manipulable.

Où sont les maths derrière les élections

Critères de votes:

1. **Unanime** Si un candidat est préféré par tous, il doit être élu.
2. **Souveraineté** Tous les candidats doivent avoir une chance d'être élus.
3. **Universel** On doit toujours pouvoir déterminer un gagnant A sur un ensemble de candidats. C'est à dire qu'on doit toujours pouvoir déduire une volonté collective à partir des volontés individuelles.
4. **Non-dictature** Aucun votant ne doit pouvoir imposer ses préférences indépendamment des préférences des autres.
5. **Indépendants aux candidats non pertinents** L'introduction de nouveaux candidats ne doit pas modifier l'ordre relatif entre les candidats dans chaque bulletin.

Théorème (Paradoxe d'Arrow, prix Nobel d'économie 1972). Si l'on a au moins 3 candidats, un système de vote qui est Universel, Unanime et Indépendante aux Candidats Non-Pertinents alors il est dictatorial.

Théorème (Gibbard-Satterthwaite(1973)). Si l'on a au moins 3 candidats, un système de vote Non-Dictatorial et Universel, alors il est manipulable.