UNIVERSITE LOUIS PASTEUR

Département de Mathématique

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 1

S T R A S B O U R G

Daniel SCHAUB

A.M.S. : Subject classification (1980) : 14 - 00 ; 34 A XX .

Mots clés : grassmaniennes - équations de Pfaff algébriques - feuilletages .

Sujet : QUELQUES PROPRIETES DES EQUATIONS DE PFAFF ALGEBRIQUES SUR LES GRASSMANIENNES.

104/P-58

INTRODUCTION

Après quelques généralités sur les grassmaniennes sur $\mathbb{C}$ et ses fibrés canoniques, on s'est attaché dans ce travail à caractériser les formes de Pfaff algébriques sur $G = G(p, p+q)$, et surtout les morphismes de fibrés :

$$\omega : T(G) \longrightarrow (L^{\vee})^{\otimes g} ,$$

L désignant le fibré en droites canonique sur G et $T(G)$ le fibré tangent de G .

C'est ainsi qu'on démontre qu'un tel morphisme correspond, de manière unique, à la donnée de $p(p+q)$ polynômes ω_{ij} en les variables

$$X = (X_{11}, \dots, X_{pp+q})$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Omega(X) \circ {}^t X = 0 \\ {}^t\Lambda \circ \Omega(\Lambda \circ X) = |\Lambda|^g \, \Omega(X) \quad \text{pour tout } \Lambda \in G\ell(p) , \end{cases}$$

où Ω désigne la $(p, p+q)$-matrice de terme général $\omega_{ij}(X_{11}, \dots, X_{pp+q})$ (cf. proposition 2).

Après quelques considérations sur la dimension de l'espace de ces formes de degré donné g , sur le nombre maximal de solutions d'une équation de Pfaff $\omega = 0$ et sur le lieu singulier d'une telle forme, on s'est attaché (cf. proposition 3), suivant ainsi [3], à dégager quelques remarques sur les solutions normales d'une telle équation de Pfaff.

De ces remarques, on déduit, en particulier, qu'un feuilletage algébrique sur G , défini par une forme de Pfaff ω , ne peut avoir de feuille compacte.

I. GENERALITES

On désignera par G la grassmanienne des p- plans de $\mathbb{C}^{(p+q)}$ (ou par $G(p, p+q)$ lorsqu'on veut préciser p et q).

Un p-plan P de $\mathbb{C}^{(p+q)}$ étant engendré par un système linéairement indépendant de p-vecteurs de $\mathbb{C}^{(p+q)}$, il est clair que celui-ci peut être représenté par une matrice à $p(p+q)$ éléments, notée :

$$M_p = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots\cdots & \pi_{1p+q} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{p1} & \cdots\cdots & \pi_{pp+q} \end{pmatrix}$$

de rang p .

Deux systèmes de p vecteurs V et W représentent le même plan P si et seulement si il existe une matrice inversible d'ordre p , Λ , telle que : $V = \Lambda W$. Par conséquent deux matrices $p(p+q)$ représentent le même plan P de $\mathbb{C}^{(p+q)}$ si et seulement si l'une se déduit de l'autre par multiplication à gauche par élément du groupe linéaire $G\ell(p)$.

Notons $H = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^{p+q})$ $(\simeq \mathbb{C}^{p(p+q)})$ l'ensemble des homomorphismes d'espaces vectoriels de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^{p+q}$, par $M = \mathrm{Mon}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^{p+q})$ le sous-ensemble constitué par les monomorphismes et par Y le fermé $H \dot{-} M$.

On déduit aisément de ce qui précède que G peut aussi se réaliser comme le quotient de M par l'action de groupe de $G\ell(p)$, i.e. on a la suite exacte suivante :

$$(*) \quad G\ell(p) \times M \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M \xrightarrow{\pi} G \ ,$$

où $\alpha((\Lambda, X)) = X$ et $\beta((\Lambda, X)) = \Lambda X$.

Etant donné un p-uplet $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ d'entiers de $\{1, 2, \ldots, p+q\}$, on note $\alpha(M_P)$ le $p \times p$-mineur de la matrice M_P dont les colonnes sont constituées par les colonnes de M_P d'indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$; on désigne par $|\alpha(M_P)|$ son déterminant.

On désigne encore par U_α l'ouvert de G des points P tels que $|\alpha(M_P)| \neq 0$ pour toute matrice M_P représentant P. Clairement, G est la réunion des ouverts U_α où α décrit l'ensemble des p-uplets de $\{1, 2, \ldots, p+q\}$.

L'application : $U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^{pq}$

$$P \longmapsto \alpha(M_P)^{-1} . M_P$$

est bien définie et est un homéomorphisme, pour tout α ; ce qui permet de munir G d'une structure de variété algébrique lisse de dimension pq.

II.

FIBRÉ UNIVERSEL ET FIBRÉ EN DROITES CANONIQUES

Commençons par rappeler la définition du fibré universel (ou fibré en p-plans canonique) R sur G. Par définition, R est le sous-fibré du fibré trivial $E = C^{p+q} \times G$ sur G dont la fibre en chaque point P de G est précisément le sous-espace linéaire P de C^{p+q}.

Tout point P de U_α est déterminé de manière unique par les vecteurs lignes $v_1, \dots, v_p$ de la matrice $\alpha(M_P)^{-1} . M_P$. Ces vecteurs sont évidemment indépendants de la matrice M_P choisie pour représenter la point P :

en effet, si N_P est un autre représentant de P, il existe $\Lambda \in G\ell(p)$ telle que :

$$N_P = \Lambda M_P .$$

Or :

$$\alpha(N_P)^{-1} . N_P = \alpha(\Lambda M_P)^{-1} . \Lambda M_P = \alpha(M_P)^{-1} . M_P .$$

D'après sa définition, R n'est autre que :

$$R = \{(X, P) \in C^{p+q} \times G \mid X \in P\} .$$

Mais P étant un point de U_α,

$X \in P$ si et seulement si il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in C^p$ tel que :

$$X = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p .$$

Par conséquent $R|U_\alpha = \{(X, P) \in C^{p+q} \times U_\alpha \mid X = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p\}$.

L'application :

$$R|U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times C^p$$
$$(X, P) \longmapsto (X, (\lambda_1, \dots, \lambda_p))$$

définit ainsi une trivialisation du fibré vectoriel R au-dessus de l'ouvert U_α.

Clairement, dans ces trivialisations, les fonctions de transition de R sont données par :

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\ell(p)$$
$$P \longmapsto \beta(P) . \alpha(P)^{-1} .$$

(Remarque : on devrait en fait écrire $\beta(M_P)^{-1} . \alpha(M_P)$, mais clairement ce produit ne dépend que de P et non de la matrice choisie comme représentante du point P.)

Le fibré en droites canonique sur G est défini comme étant $L = \Lambda^p R$. Ses fonctions de transition, dans les trivialisations données par $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$, étant :

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow C^*$$
$$P \longmapsto \frac{|\beta(P)|}{|\alpha(P)|} .$$

Le fibré quotient universel Q sera :

$$Q = E/R .$$

Rappelons encore que :

LEMME. Pic(G) <u>est isomorphe à</u> $\mathbb{Z}$ <u>avec pour générateur la classe d'isomorphisme</u> [L] <u>du fibré en droites canonique</u> L <u>sur</u> G .

<u>Démonstration</u>. Soit F un fibré en droites sur G et soient

$$\varphi_\alpha : F|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times C$$

des trivialisations de F .

Une section de F au-dessus de U_α correspond à une fonction régulière sur $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, autrement dit à un élément de $\Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}})$.

Cette identification étant faite, la fonction de transition $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ réalise alors un isomorphisme de $\Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}})$ sur lui-même, en tant que $\Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}})$-module, donc correspond à un élément inversible de $\Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_{U_{\alpha\beta}})$.

Or de la suite exacte :

$$(*) \quad G\ell(p) \times M \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M \xrightarrow{\pi} G ,$$

on déduit que toute fonction régulière f (respectivement : inversible) sur $U_{\alpha\beta}$ définit une fonction régulière $\pi^* f$ (resp. : inversible) sur $\pi^{-1} U_{\alpha\beta}$ par :

$$\pi^* f(M_P) = f(P) .$$

Et réciproquement, toute fonction régulière g (resp. inversible) sur $\pi^{-1} U_{\alpha\beta}$ telle que :

$$(1) \quad g(\Lambda X) = g(X) \quad \text{pour tous} \quad X \in \pi^{-1} U_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \Lambda \in G\ell(p)$$

définit une fonction régulière $\pi_* g$ (resp. : inversible) sur $U_{\alpha\beta}$ par :

$$\pi_* g(\pi(X)) = g(X) .$$

Or : $\Gamma(\pi^{-1} U_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_{\pi^{-1} U_{\alpha\beta}}) = \mathbb{C}\left[(X_{ij}) \begin{array}{l} i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,p+q \end{array}\right]\left[|\alpha(X)|^{-1}, |\beta(X)|^{-1}\right]$.

Les seuls éléments inversibles de cet anneau sont de la forme :

$$\lambda . \frac{|\alpha(X)|^m}{|\beta(X)|^n}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

et ceux vérifiant (1) sont de cette forme avec $m = n$.

Par conséquent, les fonctions de transition de F dans les trivialisations φ_α sont de la forme :

$$\lambda \cdot \frac{|\alpha(X)|}{|\beta(X)|}^m, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z},$$

ce qui signifie précisément que la classe d'isomorphisme $[F]$ de F est égale à :

$$[F] = m \cdot [L] \quad , \quad m \in \mathbb{Z} . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Rappelons encore pour finir que si $T(G)$ dénote le fibré tangent de G et $T(G)^*$ le fibré cotangent, on a : $T(G)^* \tilde{=} R \otimes Q^*$, Q^* désignant le fibré dual de Q (voir par exemple : Th. HANGAN. Tensor Product tangent Bundles. Arch. Math. Vol. XIX (1968)).

<u>Sections globales du fibré dual $L^{\vee}$ de L sur G .</u>

Aux trivialisations $\varphi_\alpha : L|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ de L au-dessus de U_α correspondent des trivialisations : $\varphi_\alpha^* : L^{\vee}|_{U_\varphi} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$.

Les fonctions de transition de $L^{\vee}|_{U_\alpha}$ dans ces trivialisations sont données par

$$\psi_{\alpha\beta}(X) = (\varphi_{\alpha\beta}(X))^{-1} = \frac{|\alpha(X)|}{|\beta(X)|} .$$

Si maintenant S est une section globale de $L^{\vee}$ au-dessus de G , celle-ci correspond, à travers les trivialisations φ_α^* , à la donnée d'une collection de fonctions :

$$S_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$$

telles que :

$$\varphi_\alpha^{*-1} \circ S_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = \varphi_\beta^{*-1} \circ S_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$$

i.e. :

$$S_\beta|_{U_{\alpha\beta}} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1} \circ S_\alpha . \ (1).$$

Autrement dit, S correspond à la donnée de polynômes S_α en les pq variables

Y_{ij} qui sont les termes non constants de $\alpha(X)^{-1} \cdot X$; polynômes qui doivent vérifier, d'après (1), la formule :

$$|\beta(X)|\ s_\beta(\beta^{-1}(X) \cdot X) = |\alpha(X)|\ s_\alpha(\alpha(X)^{-1} \cdot X) .$$

Posons $P_\alpha(X) = |\alpha(X)| \cdot s_\alpha(\alpha^{-1}(X) \cdot X)$ pour $X \in \pi^{-1} U_\alpha$, quel que soit α .

Comme sur $\pi^{-1} U_\alpha \cap \pi^{-1} U_\beta$, on a $P_\alpha = P_\beta$, ceux-ci définissent une section globale P du faisceau structural $\mathcal{O}_M$ de M .

Or $Y = H \dot{-} M$ est défini par les équations $\{|\alpha(X)| = 0 , \forall \alpha\}$. Les $|\alpha(X)|$ étant des polynômes premiers, l'idéal $I = \{|\alpha(X)| , \forall \alpha\}$ contient au moins un système de 2 paramètres (i.e. : Y est de codimension supérieure ou égale à 2), par conséquent :

$$\mathrm{prof}_I(\mathcal{O}_H) \geq 2 .$$

On en déduit ([2], théorème 3.8 p. 44) que :

$$H^0_Y(\mathcal{O}_H) = H^1_Y(\mathcal{O}_H) = 0$$

et de la suite exacte de cohomologie à supports :

$$0 \longrightarrow H^0_Y(H, \mathcal{O}_H) \longrightarrow H^0(H, \mathcal{O}_H) \xrightarrow{\text{rest.}} H^0(M, \mathcal{O}_H) \longrightarrow H^1_Y(H, \mathcal{O}_H) ,$$

on déduit alors que :

$$H^0(H, \mathcal{O}_H) \xrightarrow{\sim} H^0(M, \mathcal{O}_H) .$$

Autrement dit toute fonction sur M se prolonge en une fonction sur H . Or une fonction globale sur H est donnée par un polynôme Q en les variables X_{ij} , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, p+q$.

On doit avoir : $Q_{|M} = P$, autrement dit :

$$Q_{|U_\alpha}(X) = P_\alpha(X) = |\alpha(X)|\ s_\alpha(\alpha(X)^{-1} \cdot X) \quad \text{pour tout } \alpha ,$$

et comme :

$$|\alpha(\Lambda X)| \cdot s_\alpha(\alpha(\Lambda X)^{-1} \cdot \Lambda X) = |\Lambda| \; |\alpha(X)| \cdot s_\alpha(\alpha(X)^{-1} \cdot X)$$

pour tout α et tout $\Lambda \in G\ell(p)$.

G doit vérifier :

$$Q(\Lambda X) = |\Lambda| \; Q(X) \quad \text{pour tout} \quad \Lambda \in G\ell(p) . \qquad (2)$$

(ce qui implique en particulier que :

$$Q((\lambda X_{ij})) = \lambda^p \; Q(X_{ij}) \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathbb{C} ,$$

c'est-à-dire : Q est un polynôme homogène de degré p .)

<u>Réciproquement</u> : Q étant un polynôme (homogène de degré p) vérifiant (2), les polynômes $Q(\alpha(X)^{-1} . X)$ définissent des fonctions sur U_α vérifiant la formule (1), donc une section globale s de $L^\vee$ au-dessus de G .

D'où la proposition :

PROPOSITION. <u>Les sections globales</u> $\Gamma(G , L^\vee)$ <u>du fibré en droites</u> $L^\vee$, <u>dual du fibré en droites canonique</u> L <u>sur</u> G , <u>correspondent biunivoquement aux polynômes</u> (<u>homogènes</u>) Q (<u>de degré</u> p) <u>en les variables</u> X_{ij} , $i = 1 , \ldots , p$, $j = 1 , \ldots , p+q$ <u>tels que</u> :

$$Q(\Lambda X) = |\Lambda| \; Q(X) \quad \underline{\text{pour tout}} \quad \Lambda \in G\ell(p) .$$

<u>Remarque.</u> On montre de manière analogue que les éléments de $\Gamma(G , L^{\vee \otimes n})$, $n \in \mathbb{N}^*$ correspondent aux polynômes (homogènes) Q (de degré np) tels que :

$$Q(\Lambda X) = |\Lambda|^n \; Q(X) \quad \text{pour tout} \quad \Lambda \in G\ell(p) .$$

Formule d'Euler: Si Q est un polynôme tel que :

(2) $\qquad Q(\Lambda X) = |\Lambda|^n \, Q(X)$ pour tout $\Lambda \in G\ell(p)$,

et si ∂Q désigne la matrice de terme général $\dfrac{\partial Q}{\partial X_{ij}}$, alors

(3) $\qquad \partial Q \circ {}^t X = nQ(X) \cdot I$

(I désignant la matrice identité de $G\ell(p)$) .

Démonstration. Dérivons les 2 membres de la relation (2) par rapport à λ_{ij} :

$$\frac{\partial Q(\Lambda X)}{\partial \lambda_{ij}} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial Q}{\partial X_{\alpha\beta}} (\Lambda X) \cdot \frac{\partial (\Lambda X)_{\alpha\beta}}{\partial \lambda_{ij}} .$$

Or comme $(\Lambda X)_{\alpha\beta} = \sum\limits_{\mu} \lambda_{\alpha\mu} \cdot X_{\mu\beta}$, on en déduit que :

$$\frac{\partial (\Lambda X)_{\alpha\beta}}{\partial \lambda_{ij}} = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha \neq i \text{ ou } \alpha = i \text{ , } \mu \neq j \\ X_{j\beta} \text{ si } \alpha = i \text{ et } \mu = j . \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial Q(\Lambda X)}{\partial \lambda_{ij}} = \sum_{\beta} \frac{\partial Q}{\partial X_{i\beta}} (\Lambda X) \cdot X_{j\beta} .$$

D'autre part :

$$\frac{\partial [|\Lambda|^n \, Q(X)]}{\partial \lambda_{ij}} = n|\Lambda|^{n-1} \cdot C(\lambda_{ij}) \cdot Q(X) ,$$

où $C(\lambda_{ij})$ désigne le cofacteur de λ_{ij} dans Λ .

Par conséquent :

$$\sum_{\beta} \frac{\partial Q}{\partial X_{i\beta}} (\Lambda X) \cdot X_{j\beta} = n \cdot |\Lambda|^{n-1} \cdot C(\lambda_{ij}) \cdot Q(X) \quad \text{pour tout } \Lambda \in G\ell(p) .$$

En particulier, si $\Lambda = I$, cela devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\beta} \frac{\partial Q}{\partial X_{i\beta}}(X) \, . \, X_{j\beta} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \, . \\ \\ \sum\limits_{\beta} \frac{\partial Q}{\partial X_{i\beta}}(X) \, . \, X_{i\beta} = nQ(X) \, , \end{array} \right.$$

ces relations pouvant se condenser en (3).

c.q.f.d.

III

FORMES DE PFAFF RATIONNELLES SUR G ET MORPHISMES $T(G) \longrightarrow (L^{\vee})^{\otimes g}$.

Nous allons dégager les deux propositions suivantes que nous démontrerons simultanément.

Dans ce qui suit nous désignerons par :

- X , à la fois le $p(p+q)$-uplet de variables $(X_{11}, \dots, X_{p\,p+q})$ et la $(p, p+q)$-matrice de terme général $X_{k\ell}$;

- $\Omega(X)$ la $(p, p+q)$-matrice de terme général $\omega_{ij}(X)$, où $\omega_{ij}(X)$ désigne un polynôme en les $p(p+q)$ variables $X_{k\ell}$;

- $\Omega(\Lambda \circ X)$ la matrice de terme général : $\omega_{ij}\left[\left(\sum_{s=1}^{p} \lambda_{ks} \cdot X_{s\ell}\right)\begin{array}{l} k=1,\dots,p \\ \ell=1,\dots,p+q \end{array}\right]$.

PROPOSITION 1. <u>Toute forme de Pfaff rationnelle sur</u> G <u>correspond</u>, <u>de manière unique</u>, <u>à un quotient</u> $\Omega(X)/u(X)$ <u>tel que</u>, <u>pour un certain</u> $n \in \mathbb{N}$:

(1) $u(X)$ <u>est un polynôme vérifiant</u> $u(\Lambda X) = |\Lambda|^n\, u(X)$,

(2) $\Omega(X) \circ {}^tX = 0$,

(3) ${}^t\Lambda \circ \Omega(\Lambda \circ X) = |\Lambda|^n\, \Omega(X)$ <u>pour tout</u> $\Lambda \in G\ell(p)$.

<u>Remarque et définition</u>. Il est toujours possible de ramener un tel quotient au cas où u est premier à l'ensemble des ω_{ij} . Dans ce cas, l'entier n apparaissant dans les formules (1) et (3) est appelé <u>degré</u> de la forme de Pfaff rationnelle ω .

<u>Définition</u>. Nous dirons que ω est <u>irréductible</u> si $\mathrm{pgcd}(\omega_{ij}) = 1$.

PROPOSITION 2. <u>Tout morphisme</u> $\omega : T(G) \longrightarrow (L^{v})^{\otimes g}$, $g > 0$, <u>correspond à la donnée de</u> $p(p+q)$ <u>polynômes</u> ω_{ij} <u>vérifiant les conditions</u> (2) <u>et</u> (3) <u>de la proposition</u> 1 <u>avec</u> $n = g$.

Plus précisément, cette correspondance définit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de l'espace $\Gamma(G, T(G) \otimes L^{\otimes g})$ des sections globales de $T(G) \otimes L^{\otimes g}$ sur l'ensemble P_g des $(p, p+q)$- matrices Ω de polynômes ω_{ij} telles que :

$$\begin{cases} \Omega(X) \circ {}^tX = 0 \\ {}^t\Lambda \circ \Omega(\Lambda \circ X) = |\Lambda|^g \, \Omega(X) \quad \text{pour tout } \Lambda \in G\ell(p) . \end{cases}$$

La démonstration de ces deux propositions se fera en trois parties :

a) A toute forme rationnelle ω sur G , on fait correspondre des polynômes u et ω_{ij} vérifiant (1), (2), (3) ;

b) A tout morphisme $T(G) \longrightarrow (L^{v})^{\otimes g}$, on fait correspondre des polynômes ω_{ij} vérifiant (2) et (3) ;

c) et réciproquement.

<u>Démonstrations</u>.

a) Rappelons tout d'abord la suite exacte :

$$(*) \quad G\ell(p) \times M \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M \xrightarrow{\ \pi\ } G$$

où : $\alpha(\Lambda, X) = X$ et $\beta(\Lambda, X) = \Lambda X$.

Soit maintenant ω une forme différentielle rationnelle sur G , c'est donc par définition, une forme différentielle régulière sur un ouvert U de G .

A ω correspond une forme différentielle régulière $\pi^* \omega$ sur $\pi^{-1} U$, définie par : $\pi^*\omega(x) = (d_x \pi)^* (\omega(\pi(x))$.

Or $\pi^{-1} U$ est un ouvert de $H \simeq \mathbb{C}^{p(p+q)}$, par conséquent une forme différentielle régulière sur $\pi^{-1}U$, qui est une forme rationnelle sur H , s'écrit :

$$\pi^*\omega = \sum_{i,j} \frac{\eta_{ij}(X)}{f_{ij}(X)} dX_{ij} \quad \text{avec} \quad f_{ij}(X) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \pi^{-1} U .$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\pi^*\omega = \sum_{i,j} \frac{\omega_{ij}(X)}{u} dX_{ij} ,$$

où les ω_{ij} , u sont des polynômes tels que u soit premier à l'ensemble des ω_{ij}.

Alors $u.\pi^*\omega$ est une forme différentielle régulière ω' sur H telle que, sur $\pi^{-1} U$:

$$\pi^*\omega = \frac{\omega'}{u} .$$

Considérons alors $\alpha^*\omega'$ et $\beta^*\omega'$: ce sont des formes différentielles régulières sur $G\ell(p) \times H$ telles que, sur l'ouvert $\alpha^{-1}\pi^{-1}(U) = \beta^{-1}\pi^{-1}(U)$:

$$\alpha^*\omega' = \alpha^*(u).(\alpha^*\pi^*\omega)$$

$$\beta^*\omega' = \beta^*(u).(\beta^*\pi^*\omega)$$

et comme $\alpha^*\pi^*\omega = \beta^*\pi^*\omega$, on en déduit que :

$$(**) \quad \beta^*(u)\ \alpha^*(\omega') = \alpha^*(u).\beta^*(\omega') \quad \text{sur} \quad (\pi\alpha)^{-1}(U) ,$$

d'où l'égalité (**) sur tout $G\ell(p) \times H$.

Cette égalité (**) s'écrit encore :

$$(1) \qquad u(\Lambda X).(\Sigma\, \omega_{ij}(X)\, dX_{ij}) = u(X).(\Sigma\, \omega_{ij}(\Lambda X)\, .\, d(\beta^*(X_{ij}))) .$$

Mais $\beta^*(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{p} X_{ik}\,\Lambda_{kj}$,

d'où : $d(\beta^*(X_{ij})) = \sum_{k=1}^{p} (X_{ik}\, d\Lambda_{kj} + \Lambda_{kj}\, dX_{ik})$.

D'où (1) s'écrit :

$$(2)\quad u(\Lambda X)\cdot\Big(\sum_{i,j} \omega_{ij}(X)\, dX_{ij}\Big) = u(X)\Big[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{\ell=1}^{p+q} \omega_{j\ell}(\Lambda X).X_{i\ell}\Big)\, d\Lambda_{ij} + \sum_{i,j}\Big(\sum_{\ell=1}^{p} \omega_{i\ell}(\Lambda X)\cdot\Lambda_{j\ell}\Big)dX_{ij}\Big],$$

d'où les relations, pour tous i, j :

$$(3)\quad \Big(\sum_{\ell} \omega_{\ell j}(\Lambda X).X_{\ell i}\Big)\, U(X) = 0 \Longrightarrow \sum_{\ell} \omega_{\ell j}(\Lambda X)\cdot X_{\ell i} = 0 .$$

$$(4)\quad u(\Lambda X).\ \omega_{ij}(X) = u(X).\Big[\sum_{\ell} \omega_{\ell j}(\Lambda X).\Lambda_{\ell i}\Big] .$$

Mais $u(X)$ est premier à l'ensemble des $\omega_{ij}(X)$, donc $u(X)$ est premier à $\mathrm{pgcd}(\omega_{ij}(X))$. Or $u(X)$ divise $u(\Lambda X)\cdot \mathrm{pgcd}(\omega_{ij}(X))$, d'où $u(X)$ divise $u(\Lambda X)$ et par conséquent $\frac{u(\Lambda X)}{u(X)}$ est un polynôme noté $A(X, \Lambda)$.

Adoptant les notations de la proposition (1), nous pouvons reécrire les relations (3) et (4) sous la forme :

$$(5)\quad \Omega(\Lambda X)\cdot {}^tX = 0 ;$$

$$(6)\quad {}^t\Lambda\cdot\Omega(\Lambda X) = A(X, \Lambda).\ \Omega(X) .$$

Appliquant à présent la relation (4) au cas où la matrice Λ est une matrice diagonale :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} U & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U \end{pmatrix} ,$$

on constate que :

(7) $$U\cdot\omega_{ij}((UX_{k\ell})) = A((X_{k\ell}), U)\cdot\omega_{ij}((X_{k\ell})) .$$

Décomposant alors ω_{ij} en ses composantes homogènes ω^k_{ij} de degré k , on déduit de (7) que :

$$U^{k+1} . \omega^k_{ij}(X) = A(X, U) . \omega^k_{ij}(X) .$$

Autrement dit, $A(X, U) = U^{k+1}$ et par conséquent tous les ω_{ij} sont homogènes de même degré.

La formule (6) s'écrivant dans le cas général :

(6') $$\sum_{k=1}^{p} \Lambda_{ki}\ \omega_{kj}(\Lambda X) = A(X, \Lambda) . \omega_{ij}(X) ,$$

on constate alors que pour des raisons de degré, $A(X , \Lambda)$ ne dépend que de Λ .

Et comme, d'après (6) toujours, on a :

$$\begin{aligned} A(\Lambda\Lambda') \Omega(X) &= {}^t(\Lambda\Lambda').\Omega(\Lambda\Lambda'X) = {}^t\Lambda'\ {}^t\Lambda\ \Omega[\Lambda(\Lambda'X)] \\ &= {}^t\Lambda'.A(\Lambda)\ \Omega(\Lambda'X) = A(\Lambda)\ A(\Lambda').\Omega(X) . \end{aligned}$$

L'application $A : M(p, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ doit vérifier :

$$\Lambda \longmapsto A(\Lambda)$$

$$A(\Lambda\Lambda') = A(\Lambda).A(\Lambda') .$$

Par conséquent, la restriction de A à $G\ell(p)$ est un caractère rationnel de $G\ell(p)$, donc de la forme : $[\det(\Lambda)]^g$, $g \in \mathbb{Z}$. Mais A étant défini sur tout $M(p , \mathbb{C})$, le nombre g est positif ou nul. Par conséquent :

$$A(\Lambda) = [\det(\Lambda)]^g , \quad g \in \mathbb{N} .$$

Remarquons au passage que :

α) $k = \deg(\omega_{ij}) = \deg(A) - 1 = gp - 1$.

En particulier, p divise $k+1$.

β) la relation (5) peut encore s'écrire, à l'aide de (6) :

$\Omega(X)\ {}^tX = 0$.

(en effet : $\Omega(\Lambda X)\ {}^tX = 0 \Longleftrightarrow 0 = {}^t\Lambda\ \Omega(\Lambda X)\ {}^tX = A(T)\cdot\Omega(X)\ {}^tX$).

γ) comme $\dfrac{u(\Lambda X)}{u(X)} = A(X, \Lambda) = |\Lambda|^g$, on a bien entendu $u(\Lambda X) = |\Lambda|^g u(X)$.

b) Donnons-nous à présent un morphisme $\omega : T(G) \longrightarrow (L^v)^{\otimes g}$, $g > 0$.
Si s est une section globale de $(L^v)^{\otimes g}$ (on a vu dans II) que de telles sections existaient bien pour $g > 0$), celle-ci définit un morphisme :

$$S : \Theta_G \longrightarrow (L^v)^{\otimes g}$$

(Θ_G désignant le fibré trivial de rang 1 sur G).

Si U est alors l'ouvert de G des points où S ne s'annule pas, $S_{|U}$ est un isomorphisme et par conséquent ω définit par composition un morphisme :

$$T(G)_{|U} \xrightarrow{\ \omega\ } (L^v|_U^{\otimes g}) \xrightarrow{\ s^{-1}\ } \Theta_{G|U} ,$$

autrement dit une forme régulière $\frac{\omega}{s}$ sur U et on vient de voir qu'alors $\pi^*(\frac{\omega}{s})$ pouvait s'écrire :

$$\pi^*\left(\frac{\omega}{s}\right) = \frac{\Sigma\ \omega_{ij}\ dX_{ij}}{u} .$$

Les ω_{ij} et u vérifient les conditions (1), (2), (3) de la proposition 1.
Mais d'autre part, $\omega : T(G) \longrightarrow (L^v)^{\otimes g}$ se relève en un morphisme :

$$\pi^*\omega : \pi^* T(G) \longrightarrow \pi^*(L^v)^{\otimes g} ,$$

qui composé avec le morphisme canonique : $T(M) \longrightarrow \pi^* T(G)$ définit un morphisme (toujours noté $\pi^*\omega$) :

$$\pi^*\omega : T(M) \longrightarrow \pi^*(L^v)^{\otimes g} .$$

Mais $(\pi^* L^v)^{\otimes g}$ est canoniquement isomorphe (à constante près) au fibré trivial de rang 1, Θ_M, sur M .

Par conséquent, $\pi^* \omega$ définit un morphisme :

$$\pi^* \omega : T(M) \longrightarrow \Theta_M ,$$

autrement dit, une forme régulière sur M.

La sous-variété fermée Y de H étant de codimension supérieure ou égale à 2 (cf. II), on a :

$$H^0_y(H, \Omega^1_H) = H^1_y(H, \Omega^1_H) = 0 ,$$

et par conséquent, la restriction :

$$H^0(H, \Omega^1_H) \xrightarrow{\text{rest.}} H^0(M, \Omega^1_M)$$

est un isomorphisme.

En conséquence de quoi, $\pi^* \omega$ définit une forme régulière sur H tout entier, i.e. $\pi^* \omega$ peut s'écrire : $\pi^* \omega = \sum_{i,j} \omega'_{ij} \, dX_{ij}$.

La forme régulière $\pi^* \frac{\omega}{s}$, sur $\pi^{-1} U$ a donc 2 écritures, l'une définie de manière unique, sous la forme $\frac{\Sigma\, \omega'_{ij} \, dX_{ij}}{s}$, l'autre sous la forme : $\frac{\Sigma\, \omega'_{ij} \, dX_{ij}}{u}$, où u et les ω_{ij} vérifient (1), (2), (3) de la proposition 1.

De l'égalité :

$$\frac{\Sigma\, \omega_{ij} \, dX_{ij}}{u} = \frac{\Sigma\, \omega'_{ij} \, dX_{ij}}{s} , \text{ sur } \pi^{-1} U , \text{ on déduit les égalités :}$$

$$s\omega_{ij} = u\omega'_{ij} , \text{ pour tous } i, j \text{ sur } H \text{ tout entier.}$$

Montrons qu'on en déduit que les ω'_{ij} vérifient aussi les relations (2) et (3).

Rappelons que : $u(\Lambda X) = |\Lambda|^n \, u(X)$ pour un certain n , et que $s(\Lambda X) = |\Lambda|^g \, s(X)$.

Alors $${}^t\Lambda \, \Omega'(\Lambda X) = \frac{s(\Lambda X)}{u(\Lambda X)} \, {}^t\Lambda \Omega(\Lambda X) = |\Lambda|^{g-n} \frac{s(X)}{u(X)} \, . \, |\Lambda|^n \, \Omega(X)$$

$$= |\Lambda|^g \frac{s(X)}{u(X)} \, \Omega(X) = |\Lambda|^g \, \Omega'(X) ,$$

et $\Omega'(X) \, {}^tX = \frac{s(X)}{u(X)} \, . \, \Omega(X) \, {}^tX = 0$.

c) Etant donnés des polynômes $\omega_{ij}(X)$ (homogènes de degré $k \equiv -1\,[p]$) vérifiant les conditions (2) et (3) de la proposition 2, associons-leur dans chacun des ouverts U_α la forme différentielle :

$$\omega_\alpha = \sum_{i,j} \omega_{ij}(\alpha^{-1}\,.\,X).d(\alpha^{-1}\,.\,X)$$

(on notera, pour des raisons de commodité, $\alpha^{-1}\,.\,X$ au lieu de $\alpha(X)^{-1}\,.\,X$) et montrons que ces (ω_α) définissent un morphisme :

$$\omega : T(G) \longrightarrow (L^{v})^{\otimes g}\ ,$$

ou encore, notant $\mathcal{L}$ le $\mathcal{O}_G$-module des sections de L^{v} , $\omega : \mathcal{L}^{-g} \longrightarrow \Omega^1_G$.

Rappelons que le faisceau structural $\mathcal{O}_G$ sur G est obtenu par recollement des ouverts U_α le long de $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Si

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta} : \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_{U_\alpha}) &\longrightarrow \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_{U_\beta}) \\ \alpha^{-1}\,.\,X &\longrightarrow (\beta^{-1}\alpha)^{-1}\,.\,\beta^{-1}X \end{aligned}$$

désigne l'isomorphisme d'anneaux permettant d'identifier les 2 structures de $U_{\alpha\beta}$, celui-ci définit un morphisme :

$$\varphi^*_{\alpha\beta} : \Gamma(U_{\alpha\beta}, \Omega^1_{U_\alpha}) \longrightarrow \Gamma(U_{\alpha\beta}, \Omega^1_{U_\beta})$$

$$\sum_{i,j} \omega_{ij}(\alpha^{-1}.X).d(\alpha^{-1}X) \longrightarrow \sum_{i,j} \varphi_{\alpha\beta}(\omega_{ij}(\beta^{-1}X)).d(\varphi_{\alpha\beta}(\beta^{-1}X))_{ij}\ .$$

Donc :

$$\varphi^*_{\alpha\beta}(\omega_\alpha) = \sum_{i,j} \omega_{ij}[(\beta^{-1}\alpha)^{-1}(\beta^{-1}X)]\ d[(\beta^{-1}\alpha)^{-1}.(\beta^{-1}X)]\ .$$

Or les ω_{ij} satisfaisant à la relation (3) :

$$\omega_{ij}[(\beta^{-1}\alpha)^{-1}.(\beta^{-1}X)] = \frac{|\beta|^g}{|\alpha|^g}\ [{}^t(\beta^{-1}\alpha).\Omega(\beta^{-1}X)]_{ij}\ .$$

D'autre part :

$$d[(\beta^{-1}\alpha)^{-1}(\beta^{-1}X)] = -\ (\beta^{-1}\alpha)^{-1}\ d(\beta^{-1}\alpha)(\beta^{-1}\alpha)^{-1}(\beta^{-1}X) + (\beta^{-1}\alpha)^{-1}\ d(\beta^{-1}X)$$

(écriture matricielle),

ou encore :

$$d[(\beta^{-1}\alpha)^{-1}(\beta^{-1}X)]_{k\ell} = -\sum_{\lambda\mu\nu} (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{k\mu} \,.\, d(\beta^{-1}\alpha)_{\mu\lambda} . (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{\lambda\nu} . (\beta^{-1}X)_{\nu\ell}$$

$$+ \sum_{\lambda} (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{k\lambda} . d(\beta^{-1}X)_{\lambda\ell} \,.$$

Par conséquent :

$$\varphi^*_{\alpha\beta}(\omega_{ij}(\alpha^{-1}X)\, d(\alpha^{-1}X)) = \Big[\frac{|\beta|^g}{|\alpha|^g} \sum_{\sigma} (\beta^{-1}\alpha)_{\sigma i} . \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X)\Big]\, d\big[(\beta^{-1}\alpha)^{-1}.(\beta^{-1}X)\big]_{ij}$$

$$= \frac{|\beta|^g}{|\alpha|^g} \Big[\sum_{\sigma,\lambda} (\beta^{-1}\alpha)_{\sigma i} \circ \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X) \circ (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{i\lambda} \circ d(\beta^{-1}X)_{\lambda j}$$

$$- \sum_{\sigma,\lambda,\mu,\nu} (\beta^{-1}\alpha)_{\sigma i} \circ \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X) \circ (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{i\mu} \circ d(\beta^{-1}\alpha)_{\mu\lambda} \circ (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{\lambda\nu} \circ (\beta^{-1}X)_{\nu j} \Big]$$

et par conséquent (notant $j \notin \alpha$ le fait que $j \neq \alpha_k$, $k = 1, \ldots, p$) :

$$\varphi^*_{\alpha\beta}\Big(\sum_{\substack{i \\ j\notin\alpha}} \omega_{ij}(\alpha^{-1}X)\, d(\alpha^{-1}X)\Big) = \frac{|\beta|^g}{|\alpha|^g} (A - B) \,,$$

où $A = \sum_{\substack{i,j\notin\alpha \\ \sigma,\lambda}} (\beta^{-1}\alpha)_{\sigma i} \circ \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X) \circ (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{i\lambda} \circ d(\beta^{-1}X)_{\lambda j}$

et $B = \sum_{\substack{i,j\notin\alpha \\ \sigma,\lambda,\mu,\nu}} (\beta^{-1}\alpha)_{\sigma i} \circ \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X) \circ (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{i\mu} \circ d(\beta^{-1}\alpha)_{\mu\lambda} \circ (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{\lambda\nu} \circ (\beta^{-1}X)_{\nu j}$.

Mais $A = \sum_{\substack{j\notin\alpha \\ \sigma,\lambda}} \big(\sum_{i} (\beta^{-1}\alpha)_{\sigma i} \circ (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{i\lambda}\big) \circ \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X) \circ d(\beta^{-1}X)_{\lambda j}$

$$= \sum_{j\notin\alpha,\sigma} \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X) . d(\beta^{-1}X)_{\sigma j} = \sum_{\substack{j\notin\alpha\ j\notin\beta \\ \sigma}} \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X) . d(\beta^{-1}X)_{\sigma j}$$

(clairement : si $j = \beta_k$ pour un certain $k = 1, \ldots, p$, alors $d(\beta^{-1}X)_{\sigma\beta_k} = 0$).

De même : $B = \sum_{\substack{j\notin\alpha \\ \sigma,\lambda,\nu}} \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X) \circ d(\beta^{-1}\alpha)_{\sigma\lambda} \circ (\beta^{-1}\alpha)^{-1}_{\lambda\nu} \circ (\beta^{-1}X)_{\nu j}$.

Remarquons que : $d(\beta^{-1}\alpha)_{\sigma\lambda} = d(\beta^{-1}X)_{\sigma\alpha_\lambda}$,

d'où : $B = \sum\limits_{\substack{j\notin\alpha \\ \sigma,\lambda}} \omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X)\circ d(\beta^{-1}X)_{\sigma\alpha_\lambda}\circ(\alpha^{-1}X)_{\lambda j}$.

D'où : le coefficient de $d(\beta^{-1}X)_{\sigma\alpha_\lambda}$ n'est autre que :

$$-\sum_{j\notin\alpha}\omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X)\circ(\alpha^{-1}X)_{\lambda j}\ .$$

Mais la relation (2) est équivalente à :

$$\Omega(\beta^{-1}X)\circ{}^t(\alpha^{-1}X) = 0$$

i.e. : $\sum\limits_{j}\omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X)\circ(\alpha^{-1}X)_{\lambda j} = 0 \quad (z)$.

Or $(\alpha^{-1}X)_{\lambda\alpha_\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell\neq\lambda \\ 1 & \text{si } \ell=\lambda \end{cases}$.

Par conséquent, (z) est équivalent à :

$$\sum_{j\notin\alpha}\omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X)\circ(\alpha^{-1}X)_{\lambda j} + \omega_{\sigma\alpha_\lambda} = 0\ ,$$

d'où : $\sum\limits_{j\notin\alpha}\omega_{\sigma j}(\beta^{-1}X)\circ(\alpha^{-1}X)_{\lambda j} = -\,\omega_{\sigma\alpha_\lambda}$,

ce qui entraîne que :

$$B = \sum_{\substack{\sigma,i \\ \alpha_i\notin\beta}}\omega_{\sigma\alpha_i}\ d(\beta^{-1}X)_{\sigma\alpha_i}$$

et donc que : $A - B = \sum\limits_{j\notin\beta}\omega_{ij}(\beta^{-1}X)\ d(\beta^{-1}X)_{ij}$.

Autrement dit : $\varphi^*_{\alpha\beta}(\omega_\alpha) = \dfrac{|\beta|^g}{|\alpha|^g}\ \omega_\beta$.

Ce qui définit bien un morphisme :

$$\omega : \mathcal{L}^{-g} \longrightarrow \Omega^1_G\ .$$

<u>Remarque</u> : Un tel morphisme ω correspond à la donnée d'une section globale du faisceau $\Omega^1_G\otimes\mathcal{O}_G(g) = \Omega^1_G(g)$, autrement dit $\omega\in H^0(G\,,\Omega^1_G(g))$.

($\mathcal{L}$ étant un faisceau très ample permettant de plonger G dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$, nous notons $\mathcal{O}_G(1)$ la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ à G ; il est clair qu'alors $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_G(1)$).

IV. DIMENSION DE $H^0(G, \Omega^1_G(g))$; $g > 0$.

Pour calculer la dimension de l'espace vectoriel des morphismes $\omega : T(G) \longrightarrow (L^v)^{\otimes g}$ (ou encore, d'après la remarque précédente, de l'espace vectoriel des formes différentielles sur G à pôle d'ordre g : $H^0(G, \Omega^1_G(g))$) de manière simple, on se heurte à la difficulté d'exprimer les relations (2) et (3) en relations linéairement indépendantes dans l'espace des polynômes homogènes de degré $gp-1$.

Il a fallu par conséquent utiliser des résultats puissants qui dépassent largement le cadre restreint auquel on les applique.

Il nous a semblé intéressant de commencer par faire le calcul dans le premier cas de grassmanienne qui n'est pas un espace projectif : $G(2, 4)$.

En ce qui concerne les espaces projectifs, le calcul est aisé, utilisant la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^r}(1) \longrightarrow \mathcal{O}^{r+1}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1) \longrightarrow 0 ,$$

qui, après tensorisation par $g-1$ induit une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, {}^1_{\mathbb{P}^r}(g)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(g-1))^{r+1} \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(g)) \longrightarrow 0$$

et par conséquent :

$$h_{\mathbb{P}^r}(g) = \dim_k H^0(\mathbb{P}^r, r^1_{\mathbb{P}^r}(g))$$

$$= (r+1).\dim_k(H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(g-1)) - \dim_k(H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(g))$$

$$= (r+1)\binom{r+g-1}{g-1} - \binom{r+g}{g}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{h_{\mathbb{P}^r}(g) = (g-1)\binom{r+g-1}{g}}$$

<u>Abordons à présent le cas $G = G(2,4)$:</u>

G est une hypersurface dans $P = \mathbb{P}^5$, par conséquent on a les deux suites exactes suivantes, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$0 \longrightarrow \Omega^1_P(m-2) \longrightarrow \Omega^1_P(m) \longrightarrow \Omega^1_{P|G}(m) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_G(m-2) \longrightarrow \Omega^1_{P|G}(m) \longrightarrow \Omega^1_G(m) \longrightarrow 0 .$$

On sait par ailleurs (cf. par exemple S.G.A. 7.2 Exposé XI, p. 40) que pour $m > 2$, $H^1(P, \Omega^1_P(m-2)) = 0$.

D'autre part, les théorèmes classiques (dualité de Serre, formule d'adjonction, théorème d'annulation de Kodaira) nous permettent d'écrire que :

$$H^1(G, \mathcal{O}_G(m-2)) \simeq H^3(G, \mathcal{O}_G(-m+2) \otimes \mathcal{O}(K_G)) ,$$

$$K_G = (K_P + G)_{|G} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{O}(K_G) = \mathcal{O}_G(-4)$$

et donc :

$$H^1(G, \mathcal{O}_G(m-2)) \simeq H^3(G, \mathcal{O}_G(-m-2)) = 0 .$$

Par conséquent :

$$h^0(G, \Omega^1_G(m)) = h^0(G, \Omega^1_{P|G}(m)) - h^0(G, \mathcal{O}_G(m-2))$$

et

$$h^0(P, \Omega^1_{P|G}(m)) = h^0(P, \Omega^1_P(m)) - h^0(P, \Omega^1_P(m-2)) .$$

et la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_P(m-4) \longrightarrow \mathcal{O}_P(m-2) \longrightarrow \mathcal{O}_G(m-2) \longrightarrow 0$$

nous permet de calculer :

$$h^0(G, \mathcal{O}_G(m-2)) = h^0(P, \mathcal{O}_G(m-2)) = h^0(P, \mathcal{O}_P(m-2)) - h^0(P, \mathcal{O}_P(m-4)) .$$

D'où en conclusion :

$$h^0(G\,,\Omega^1_G(m)) = h^0(\Omega^1_P(m)) - h^0(\Omega^1_P(m-2)) + h^0(\mathcal{O}_P(m-4)) - h^0(\mathcal{O}_P(m-2))$$

$$= 6h^0(\mathcal{O}_P(m-1)) - h^0(\mathcal{O}_P(m)) - 6h^0(\mathcal{O}_P(m-3)) + h^0(\mathcal{O}_P(m-4))$$

$$= 6\,.\begin{pmatrix} m+4 \\ m-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m+5 \\ m \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} m+2 \\ m-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m+1 \\ m-4 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$h_{G(2,4)}(m) = \frac{1}{3}\,(m+3)(m+1)^2(m-1) \quad \text{pour} \quad m>2\,.$$

(où $h_G(m)$ désigne la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(G\,,\Omega^1_G(m))$.

Abordons maintenant le calcul dans le cas général :

Pour cela, faisons une 1ère remarque : si $f : G \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ désigne le morphisme structural de G , on a, par définition de l'image directe,

$$H^0(G\,,\Omega^1_G(g)) = H^0(\operatorname{Spec}(\mathbb{C})\,,\,f_*(\Omega^1_G(g)))\,.$$

Définition. E étant un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension e et $H = (h_1\,,\dots,h_e)$ une partition $(h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_e)$, on notera $T_H(E)$ la représentation irréductible de $G\ell(e)$ associée à cette partition (cf. [4] ; même référence pour tout ce qui concerne le langage des partitions).

Si maintenant E désigne un fibré vectoriel de rang e sur un espace X , on pourra considérer le fibré vectoriel $T_H(E)$ sur X , dont les fibres en $x\in X$ seront :

$$(T_H(E))_x = T_H(E_x)\,.$$

Considérons à présent la suite exacte tautologique de fibrés sur $G(p\,,p+q)$:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow f^*E \longrightarrow Q \longrightarrow 0\,,$$

avec q est le rang de Q ; $e=p+q$ la dimension de E ; p le rang de R .

Remarquons qu'avec les notations que nous venons de définir, on a :

$$R = T_{0,\dots,0,1}(R) \text{ et } Q^* = T_{0,\dots,0,1}(Q^*) .$$

Rappelons aussi (cf. [4]) la formule de dualité pour un fibré F de rang f et son dual F^* : pour toute partition $J = (j_1, \dots, j_f)$ et tout $m \geq j_f$, on a :

$$\det^m(F) \otimes T_J(F^*) = T_{m^f/J}(F) .$$

Appliquant cette formule à Q et à la partition $I = (0, \dots, 0, 1)$, on en déduit que, pour tout $g \geq 1$,

$$\det^g(Q) \otimes T_I(Q^*) = T_{g^q/I}(Q) ,$$

et g^q/I est ici la partition $(g-1, g, \dots, g)$.

Par conséquent, utilisant (cf. II) l'isomorphisme $\Omega^1_G \simeq R \otimes Q^*$, on en déduit que :

$$\Omega^1_G(g) \simeq T_{0,\dots,0,1}(R) \otimes T_{g-1,g,\dots,g}(Q) .$$

Rappelons le théorème suivant :

THEOREME de Bott (cf. [4]).

$$R^n f_*(T_I(R) \otimes T_J(Q)) = 0 \ \underline{\text{si}} \ n \neq n(I, J) ,$$
$$R^n f_*(T_I(R) \otimes T_J(Q)) = T_H(E) \ \underline{\text{si}} \ n = n(I, J) ,$$

<u>où</u> H <u>est la concaténation de</u> I <u>et</u> J <u>et</u> $n(I, J)$ <u>le nombre minimal de transpositions nécessaires pour réordonner</u> $\{i_1, i_2+1, \dots, i_r+r-1, j_1+r, \dots, j_q+r+q-1\}$ <u>en une suite strictement croissante</u>. <u>Si cela est impossible, on notera</u> $n(I, J) = \infty$.

Appliquant ce théorème on trouve que :

Si $g \geq 2$, $n(I, J) = 0$ et si $g = 1$, $n(I, J) = \infty$.

Par conséquent, $f_*(\Omega^1_G(1)) = 0$ et donc $h_G(1) = 0$, et $f_*(\Omega^1_G(g)) = T_H(E)$ si $g \geq 2$ où $H = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, 1, \underbrace{g-1, g, \ldots, g}_{q})$.

Or on sait calculer la dimension de $T_H(E)$ (cf. [4]) :

$$\dim T_H(E) = \det \begin{pmatrix} s_{n_1} & s_{n_2+1} & \cdots & s_{n_e+e-1} \\ s_{n_1-1} & s_{n_2} & \cdots & s_{n_e+e-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & s_{n_e} \end{pmatrix}.$$

où $s_k = \dim_{\mathbb{C}}(S^k(E)) = \binom{e+k-1}{k}$, ce déterminant pouvant être calculé de la manière suivante (cf. [6], Th. 15.3, p. 263) : Soit H une partition : Remplissons le diagramme de Ferrer de la partition H en mettant :

e sur la diagonale,

$e+1$ sur la 1ère sous-diagonale,

$e+2$ sur la 2ème sous-diagonale,

....

$e+g-1$ sur la dernière sous-diagonale,

$e-1$ sur la 1ère surdiagonale,

$e-2$ sur la 2ème surdiagonale,

....

$e-q$ sur la dernière surdiagonale.

Et on sait que :

$\dim(T_H(E))$ est égal au produit $N_H(E)$ de tous ces éléments, quotienté par le produit $D_H(E)$ des équerres.

Exemple : $e = 5 \quad q = 3 \quad g = 6$. $H = (1, 5, 6, 6)$

2					
3	4	5	6	7	
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Le produit des équerres est le produit des éléments du tableau :

1					
6	4	3	2	1	
8	6	5	4	3	1
9	7	6	5	4	2

D'où $\dim(T_H(E)) = 30 = h_{G(3,5)}(6)$.

Revenons au cas général où H est la partition $(1, g-1, g, \ldots, g)$ à $(q+1)$ termes.

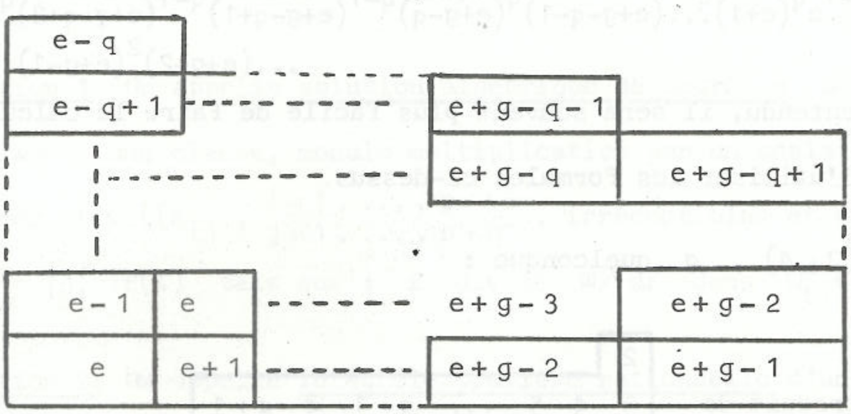
Calculons le produit des équerres : c'est, par définition, le produit $D_H(E)$ des éléments du tableau suivant :

1					
n	$n-2$	$n-1$	2	1	
$n+2$	n	$n-1$	4	3	1
$n+3$	$n+1$	n	5	4	2
$n+q$	$n+q-2$	$n+q-3$ ...	$q+2$	$q+1$	$q-1$

d'où : $D_H(E) = \dfrac{(g-1)!\,(g+q)!}{(g-1)(g+1)}\;\dfrac{g!}{2!}\;\dfrac{(g+1)!}{3!}\;\cdots\;\dfrac{(g+q-2)!}{q!}$.

En ce qui concerne le calcul de $N_H(E)$ nous aurons à distinguer 3 cas :

<u>$q<g$</u> : $N_H(E)$ est le produit des éléments du tableau :



Par conséquent :

$$N_H(E) = (e-q)(e-q+1)(e-q+2)^2\ldots(e-2)^{q-2}(e-1)^{q-1}\,e^q(e+1)^q\ldots(e+g-q-1)^q(e+g-q)^{q-1}$$
$$(e+g-q+1)^{q-1}(e+g-q+2)^{q-2}\ldots(e+g-2)^2(e+g-1) \quad \text{si} \quad g>q$$

et de manière analogue dans le cas $g=q$ et le cas $g<q$.

<u>En résumé</u> : pour $G=G(p,e)$: $q=e-p$.

<u>$g=1$</u> : $h_G(1)=0$

<u>$g<q$</u> :

$$h_G(g) = \frac{1}{\dfrac{(g-1)!(g+q)!}{(g-1)(g+1)}\;\dfrac{g!}{2!}\;\dfrac{(g+1)!}{3!}\;\cdots\;\dfrac{(g+q-2)!}{q!}} \times (e-q)(e-q+1)(e-q+2)^2\ldots$$

$$\ldots \times (e-g-q-2)^{g-2}(e-g-q-1)^{g-1}(e-g-q+1)^g\ldots(e-1)^g e^g(e+1)^{g-1}(e+2)^{g-2}\ldots(e+g-2)^2(e+g-1)\ .$$

<u>$g=q$</u> :

$$h_G(g) = \frac{(e-q)(e-q+1)\ldots(e-2)^{q-2}(e-1)^{q-1}(e+1)^{q-1}(e+2)^{q-2}\ldots(e+q-1)}{\dfrac{(g-1)!(g+q)!}{(g-1)(g+1)}\;\dfrac{g!}{2!}\;\dfrac{(g+1)!}{3!}\;\cdots\;\dfrac{(g+q-2)!}{q!}}.$$

$\underline{g > q}$:

$$h_G(g) = \frac{1}{\dfrac{(g-1)!(g+q)!}{(g-1)(g+1)} \; \dfrac{g!}{2!} \; \dfrac{(g+1)!}{3!} \; \cdots \; \dfrac{(g+q-2)!}{q!}} \times (e-q)(e-q+1)(e-q+2)^2 \ldots$$

$$\ldots \times (e-2)^{q-2}(e-1)^{q-1}e^q(e+1)^q \ldots (e+g-q-1)^q(e+g-q)^{q-1}(e+g-q+1)^{q-1}(e+g-q+2)^{q-2} \ldots$$

$$\ldots (e+g-2)^2(e+g-1) \; .$$

Remarque : Bien entendu, il sera souvent plus facile de faire le calcul directement plutôt que d'utiliser les formules ci-dessus.

Exemple : $G = G(2\,,4)$, g quelconque :

$$h_G(g) = \frac{\text{produit de } \begin{array}{|lllllll} 2 & & & & & & \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & g-1 & g & g+1 \\ 4 & 5 & \ldots\ldots & & g+1 & g+2 & g+3 \end{array}}{\text{produit de } \begin{array}{|llllll} 1 & & & & & \\ g & g-2 & g-3 & \ldots & 1 & \\ g+2 & g & g-1 & \ldots & 3 & 1 \end{array}}$$

$= \frac{1}{3}\,(g-1)(g+1)^2(g+3)$ après toutes les simplifications possibles.

V. NOMBRE MAXIMAL DE SOLUTIONS ALGEBRIQUES DE $\omega = 0$ où $\omega \in H^0(G, \Omega^1_G(m))$.

Rappelons deux définitions (cf. [3]).

Définition 1. On appelle solution algébrique de degré n de l'équation de Pfaff $\omega = 0$ une classe, modulo multiplication par un scalaire non nul, de polynômes $f \in \mathbb{C}[X_{ij}\ ,\ {}^{i=1,\dots,p}_{j=1,\dots,p+q}]$, irréductibles et vérifiant $f(\Lambda X) = |\Lambda|^n f(X)$ tels que : f divise $\omega \wedge df$ dans $\Omega^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_{ij}])$.

Définition 2. On appelle intégrale première rationnelle d'une forme de Pfaff algébrique ω sur G un élément $\varphi \in K^*_G$, non constant, tel que :

$$\omega \wedge d\varphi = 0 .$$

i.e. : un élément $\frac{f}{g}$ où f et g sont 2 polynômes tels que :

$$f(\Lambda X) = |\Lambda|^k f(X) \quad \text{et} \quad g(\Lambda X) = |\Lambda|^k g(X)$$

tel que $\omega \wedge d(\frac{f}{g}) = 0$.

ou encore : lorsque ω est irréductible, tel qu'il existe un polynôme non nul v (tel que $v(\Lambda X) = |\Lambda|^{\ell} v(X)$) tel que : $g\,df - f\,dg = v\omega$.

Par ailleurs, on sait ([3], Proposition 3.5, page 149) que si $\omega = 0$ n'admet pas d'intégrale première rationnelle, alors le nombre des solutions algébriques est fini et borné par la dimension $h^0(G, \Omega^2_G(m))$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(G, \Omega^2_G(m))$ augmenté de 2 ,

i.e. : la borne q est : $q = h^0(G, \Omega^2_G(m)) + 2$.

On calcule ici le nombre $h^0(G, \Omega^2_G(m))$ par les mêmes méthodes que celles utilisées en IV.

Pour cela, remarquons que, puisque $\Omega^1 \simeq R \otimes Q^*$, on a :

$$\Lambda^2\Omega^1 \simeq \Lambda^2(R\otimes Q^*) \simeq S^2R \otimes \Lambda^2Q^* \oplus \Lambda^2R\otimes S^2Q^*$$

(cf. formule de Cauchy [4]).

Par conséquent :

$$\Omega^2_G(m) \simeq \Lambda^2\Omega^1 \otimes \det Q^{\otimes m} \simeq S^2R \otimes Q^* \otimes \det Q^{\otimes m} \oplus \Lambda^2R \otimes S^2Q^* \otimes \det Q^{\otimes m} .$$

Ce qui nous permet d'écrire, utilisant la formule de dualité :

$$\Omega^2_G(m) \simeq T_{0,\dots,0,2}\, R \otimes T_{m-1,m-1,m,\dots,m}\, Q$$

$$\oplus\, T_{0,\dots,0,1,1}\, R \otimes T_{m-2,m,\dots,m}\, Q$$

conservant les mêmes notations qu'en IV.

D'où, par le théorème de Bott :

$$\pi_*(\Omega^2_G(m)) \simeq T_{H'}(E) \oplus T_{H''}(E) ,$$

où $H' = (0, \dots, 0, 2, m-1, m-1, m, \dots, m)$

et $H'' = (0, \dots, 0, 1, 1, m-2, m, \dots, m)$.

Le calcul des dimensions de $T_{H'}(E)$ et $T_{H''}(E)$ se faisant de la même manière qu'en IV, nous nous bornons à énoncer le résultat :

Si $m \le 2$, $H^0(G, \Omega^2_G(m)) = 0$,

Si $m > 3$,

- si $q = 1$: $h^0(\Omega^2_G(m)) = \dfrac{(e+m-2)!}{2m(m-3)!(e-3)!} \left(\dfrac{e(e+m-1)}{(e-2)(m-1)} - 1\right)$,

- si $q \ge 2$ nous écrirons $h^0(\Omega^2_G(m))$ sous la forme suivante :

$$h^0(\Omega^2_G(m)) = \frac{N_{H'}(e, m, q)}{\dfrac{2.m!(m+1)!}{(m-2)(m-1)} \displaystyle\prod_{k=3}^{q} \frac{(m+k)!(k-2)}{k!(m+k-2)}} + \frac{N_{H''}(e, m, q)}{2m(m-3)! \displaystyle\prod_{k=2}^{q} \frac{(m+k-2)!(m+k+1)}{(k-2)!(k+1)}} ,$$

<u>où</u> : - si $q = 2, \ldots, m = 2$:

$$N_{H'}(e,m,q) = (e-q)(e-q+1)^2(e-q+2)^2(e-q+3)^2 \ldots (e-1)^{q-1} e^q (e+1)^q \ldots (e+m-q-1)^q$$
$$\times (e+m-q)^{q-1}(e+m-q+1)^{q-2}(e+m-q+2)^{q-2}(e+m-q+3)^{q-3} \ldots (e+m-1) ,$$

et

$$N_{H''}(e,m,q) = (e-q-2)(e-q-1)(e-q)(e-q+1)^2 \ldots (e-1)^{q-1} e^q (e+1)^q \ldots (e+m-q-2)^q$$
$$\times (e+m-q-1)^{q-1}(e+m-q)^{q-1}(e+m-q+1)^{q-1}(e+m-q+2)^{q-2}(e+m-q+3)^{q-3} \ldots (e+m-1) .$$

- si $q = m-1$, $N_{H'}(e, m, q)$ est donné par la même formule que ci-dessus, tandis que :

$$N_{H''}(e,m,q) = (e-q-2)(e-q-1)(e-q)(e-q+1)^2 \ldots (e-2)^{q-2}(e-1)^{q-1} e^{q-1} (e+1)^{q-1}$$
$$\times (e+2)^{q-1}(e+3)^{q-2}(e+4)^{q-3} \ldots (e+q) .$$

- si $q = m$:

$$N_{H'}(e,m,q) = (e-q)(e-q+1)^2(e-q+2)^2(e-q+3)^3 \ldots (e-2)^{q-2}(e-1)^{q-1} e^{q-1} (e+1)^{q-2}$$
$$\times (e+2)^{q-2}(e+3)^{q-3} \ldots (e+q-1) ,$$

$$N_{H''}(e,m,q) = (e-q-1)(e-q)(e-q+1)(e-q+2)^2 \ldots (e-3)^{q-3}(e-2)^{q-2}(e-1)^{q-2} e^{q-1}$$
$$\times (e+1)^{q-1}(e+2)^{q-2} \ldots (e+q-1) .$$

- si $q = m+1$:

$$N_{H'}(e,m,q) = (e-q)(e-q+1)^2(e-q+2)^2(e-q+3)^3 \ldots (e-1)^{q-1} e^q (e+1)^{q-1}(e+2)^{q-2}$$
$$\times (e+3)^{q-2}(e+4)^{q-3} \ldots (e+q)$$

et $N_{H''}(e, m, q)$ est donné par la même formule que ci-dessous.

- si $q > m+1$:

$$N_{H'}(e,m,q) = (e-q)(e-q+1)^2(e-q+2)^2(e-q+3)^3 \ldots (e-q+m-3)^{m-3}(e-q+m-2)^{m-2}$$
$$\times (e-q+m-1)^{m-1}(e-q+m)^{m-1}(e-q+m+1)^{m-1}(e-q+m+2)^m \ldots e^m (e+1)^{m-1} \ldots (e+m-1) .$$

$$N_{H''}(e,m,q) = (e-q-1)(e-q)(e-q+1)(e-q+2)^2 \ldots (e-q+m-3)^{m-3}(e-q+m-2)^{m-2}$$
$$\times\ (e-q+m-1)^{m-2}(e-q+m)^{m-1}(e-q+m+1)^m \ldots e^m (e+1)^{m-1} \ldots (e+m-1)\ .$$

VI. LIEU SINGULIER D'UNE FORME DE PFAFF

Nous avons vu dans la 1ère partie qu'une forme de Pfaff de degré g sur G correspondait à la donnée d'un morphisme :

$$\omega : L^{\otimes - g} \longrightarrow \Omega^1_G$$

où L est le fibré en droite canonique, autrement dit, aussi d'un morphisme :

$$\omega : T(G) \longrightarrow L^{\otimes g} \quad .$$

<u>Définition</u>. On appelle <u>lieu singulier</u> de ω l'ensemble $S(\omega)$ suivant :

$$S(\omega) = \{x \in G \mid T(G)_x \longrightarrow L_x^{\otimes g} \text{ non surjectif } \} .$$

Nous aimerions démontrer l'analogue de la proposition 2.1, page 85 de [3], à savoir que le lieu singulier d'une forme de Pfaff sur G n'est presque jamais vide. Cependant, la méthode qui a permis de faire cette démonstration dans le cas des espaces projectifs n'est pas utilisable pour les grassmaniennes en général. Cela est dû au fait que, si la cohomologie des grassmaniennes est bien connue, les calculs y deviennent rapidement inextricables.

Nous allons cependant donner la méthode et faire les calculs dans 3 exemples : $G(2,4)$; $G(2,5)$; $G(3,6)$.

De manière générale, pour que S soit vide, il faut que le morphisme de fibré :

$$T(G) \xrightarrow{\omega} L^g$$

qui correspond à ω soit surjectif, autrement dit que ω définisse une suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow T(G) \xrightarrow{\omega} L^g \longrightarrow 0 ,$$

où E désigne le noyau de $(T(G) \longrightarrow L^g)$.

Or en tensorisant par L^{-g} , on s'aperçoit que cela nécessite que :

$$C_{pq}(T(G) \otimes L^{-g}) = 0 ,$$

où $C_{pq}(\ ) \in H^{2pq}(G , \mathbb{Z})$ désigne la dernière classe de Chern du fibré $T(G) \otimes L^{-g}$.

Rappelons tout d'abord que $H^{2pq}(G , \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, avec pour générateur le cycle de Schubert $\sigma_{\underbrace{q,\dots,q}_{p \text{ fois}}}$ (cf. [1], chap. I, § 5).

Rappelons également que l'anneau de cohomologie de G est une $\mathbb{Z}$-algèbre dont les générateurs sont les q classes de Chern, $c_1(Q) , \dots , c_q(Q)$ du fibré quotient Q sur G où $c_k(Q) = \sigma_k$.

Remarquons encore que (par application itérée de la formule de Piéri), nous avons :

$$(\sigma_q)^p = \sigma_{q,\dots,q} .$$

Par ailleurs, nous obtenons toutes les relations dans l'anneau de cohomologie de G en écrivant que :

$$C(R)\cdot C(Q) = 1$$

(conséquence de la suite exacte tautologique).

LEMME. $C_{pq}(T(G)\otimes L^{-g})$ <u>est égal au résultant des polynômes</u> $f(X - g\sigma_1)$ <u>et</u> $g(X)$, <u>où</u> :

$$f(X) = X^q + \sigma_1 X^{q-1} + \dots + \sigma_q$$

$$g(X) = X^p + \tau_1 X^{p-1} + \dots + \tau_p ,$$

<u>avec</u>

$$c(Q) = 1 + \sigma_1 + \dots + \sigma_q$$

$$c(R) = 1 + \tau_1 + \dots + \tau_p .$$

<u>Preuve</u>. Ecrivons $C(Q \otimes L^{-g}) = \prod_i (1+a_i)$ et $c(R^*) = \prod_j (1-b_j)$.

Alors clairement les a_i sont racines de $f(X - g\sigma_1)$ et les b_j de $g(X)$.

Mais $c[R^* \otimes (Q \otimes L^{-g})] = \prod_{i,j} (1 + a_i - b_j)$, par conséquent :

$$C_{pq}[R^* \otimes (Q \otimes L^{-g})] = \prod_{i,j} (a_i - b_j)$$

et ce dernier terme n'est autre que le résultant $R(f(X - g\sigma_1), g(X))$.

<u>Conséquence</u>. Pour que le lieu singulier S soit vide, il faut que le résultant des 2 polynômes $f(X - \sigma_1 g)$ et $\dot{g}(X)$ soit nul.

C'est à ce stade qu'apparaissent des calculs qui ne semblent pas pouvoir s'insérer dans une écriture générale, comme nous allons le voir sur des exemples.

<u>$G(2, 4)$</u> :

De $C(R) . C(Q) = 1$ on déduit :

$$1 + \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{1 + \sigma_1 + \sigma_2} = 1 - (\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)^3 + (\sigma_1 + \sigma_2)^4 .$$

d'où :

(1) $\tau_1 = - \sigma_1$

(2) $\tau_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2$

(3) $0 = - \sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2$

(4) $0 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2$.

$H^8(G, \mathbb{Z})$ étant isomorphe à $\mathbb{Z}$ avec générateur σ_2^2.

On peut donc écrire $\sigma_1^4 = n_1 . \sigma_2^2$,

$\sigma_1^2 . \sigma_2 = n_2 . \sigma_2^2$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$,

et des relations (3') : $0 = - \sigma_1^4 + 2\sigma_1^2\sigma_2$

et (4) : $0 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2$,

on déduit donc :

$(3') \ : \ -n_1 + 2n_2 = 0$

$(4) \ : \ n_1 - 3n_2 + 1 = 0$,

d'où $n_1 = 2$ et $n_2 = 1$.

Calculons à présent le résultant de : $\begin{cases} (X - g\sigma_1)^2 + \sigma_1(X - g\sigma_1) + \sigma_2 \\ X^2 + \tau_1 X + \tau_2 \end{cases}$

autrement dit de : $\begin{cases} X^2 + (1-2g)\sigma_1 X + \sigma_2 - g\sigma_1^2 + g^2\sigma_1^2 \\ X^2 - \sigma_1 X + (\sigma_1^2 - \sigma_2) \ , \end{cases}$

c'est-à-dire le déterminant D :

$$\begin{vmatrix} 1 & (1-2g)\sigma_1 & (\sigma_2 - g\sigma_1^2 + g^2\sigma_1^2) & 0 \\ 0 & 1 & (1-2g)\sigma_1 & (\sigma_2 - g\sigma_1^2 + g^2\sigma_1^2) \\ 1 & -\sigma_1 & \sigma_1^2 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 1 & -\sigma_1 & \sigma_1^2 - \sigma_2 \end{vmatrix}$$

$D = \sigma_1^4 \, [g^4 - 4g^3 + 7g^2 - 6g + 3] - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2$,

<u>d'où</u> : "dans $\mathbb{Z}$ " :

$$D = 2[g^4 - 4g^3 + 7g^2 - 6g + 3] \ ,$$

Or $g^4 - 4g^3 \geq 0$ dès que $g \geq 4$ et $7g^2 - 6g > 0$ dès que $g \geq 2$. Par conséquent $D > 0$ dès que $g \geq 4$ et $D(2) = 6$, $D(3) = 42$.

Par conséquent, quel que soit l'entier $g \geq 2$, le polynôme $D(g)$ est non nul, donc $c_4(T(G) \otimes L^{-g}) \neq 0$, donc $S \neq \emptyset$.

<u>$G = G(2,5)$</u> : $\dim G = 6$, $H^{12}(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, générateur : $(\sigma_3)^2$.

$c(R) \cdot c(Q) = 1$ induit :

$1 + \tau_1 + \tau_2 = 1 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \ldots + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^6$,

d'où les relations :

(1) $\tau_1 = -\sigma_1$

$$(2)\quad \tau_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2$$

$$(3)\quad 0 = -\sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$$

$$(4)\quad 0 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2$$

$$(5)\quad 0 = -\sigma_1^5 + 4\sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1^2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_3$$

$$(6)\quad 0 = \sigma_1^6 - 5\sigma_1^4\sigma_2 + 4\sigma_1^3\sigma_3 + 6\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_2^3 + \sigma_3^2 ,$$

d'où les relations :

$$(3_1)\quad -\sigma_1^6 + 2\sigma_1^4\sigma_2 - \sigma_1^3\sigma_3 = 0$$

$$(3_2)\quad -\sigma_1^4\sigma_2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0$$

$$(3_3)\quad -\sigma_1^3\sigma_3 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2 = 0$$

$$(4_1)\quad \sigma_1^6 - 3\sigma_1^4\sigma_2 + 2\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 = 0$$

$$(4_2)\quad \sigma_1^4\sigma_2 - 3\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2^3 = 0$$

$$(5_1)\quad -\sigma_1^6 + 4\sigma_1^4\sigma_2 - 3\sigma_1^3\sigma_3 - 3\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0$$

$$(6)\quad \sigma_1^6 - 5\sigma_1^4\sigma_2 + 4\sigma_1^3\sigma_3 + 6\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_2^3 + \sigma_3^2 = 0 ,$$

et identifiant $H^{12}(G, \mathbb{Z})$ avec $\mathbb{Z}$:

$$\sigma_1^6 = n_1.\sigma_3^2 ,\quad \sigma_1^4\sigma_2 = n_2.\sigma_3^2 ,\quad \sigma_1^3\sigma_3 = n_3.\sigma_3^2 ,\quad \sigma_1^2\sigma_2^2 = n_4.\sigma_3^2 ,$$

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = n_5.\sigma_3^2 ,\quad \sigma_2^3 = n_6.\sigma_3^2 .$$

$$(3_1)\quad n_1 - 2n_2 + n_3 = 0 ,$$

$$(3_2)\quad n_2 - 2n_4 + n_5 = 0 ,$$

$$(3_3)\quad n_3 - 2n_5 + 1 = 0 ,$$

$$(4_1)\quad n_1 - 3n_2 + 2n_3 + n_4 = 0 ,$$

$$(4_2)\quad n_2 - 3n_4 + 2n_5 + n_6 = 0 ,$$

$$(5_1)\quad n_1 - 4n_2 + 3n_3 + 3n_4 - 2n_5 = 0 ,$$

$$(6)\quad n_1 - 5n_2 + 4n_3 + 6n_4 - 6n_5 - n_6 + 1 = 0 .$$

Résolvant ce système, on trouve :

$$n_1 = 5 \ , \quad n_2 = 3 \ , \quad n_3 = 1 \ , \quad n_4 = 2 \ , \quad n_5 = 1 \ , \quad n_6 = 1 \ .$$

Calculons le résultant de : $\begin{cases} (X - g\sigma_1)^3 + \sigma_1(X - g\sigma_1)^2 + \sigma_2(X - g\sigma_1) + \sigma_3 \\ X^2 + \tau_1 X + \tau_2 \end{cases}$

c'est-à-dire de : $\begin{cases} X^3 + (1-3g)\sigma_1 X^2 + [(3g-2)g\sigma_1^2 + \sigma_2]X + \sigma_3 - g\sigma_1\sigma_2 + g^2\sigma_1^3(1-g) \\ X^2 - \sigma_1 X + \sigma_1^2 - \sigma_2 \ , \end{cases}$

donc le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & (1-3g)\sigma_1 & (3g-2)g\sigma_1^2 + \sigma_2 & \sigma_3 - g\sigma_1\sigma_2 + g^2\sigma_1^3(1-g) & 0 \\ 0 & 1 & (1-3g)\sigma_1 & (3g-2)g\sigma_1^2 + \sigma_2 & \begin{matrix} \sigma_3 - g\sigma_1\sigma_2 \\ + g^2\sigma_1^3(1-g) \end{matrix} \\ 1 & -\sigma_1 & \sigma_1^2 - \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sigma_1 & \sigma_1^2 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sigma_1 & \sigma_1^2 - \sigma_2 \end{vmatrix}$$

<u>d'où</u> :

$$D = \sigma_1^6(g^6 - 5g^5 + 12g^4 - 17g^3 + 16g^2 - 9g + 3) + \sigma_1^4\sigma_2(-g^4 + 4g^3 - 8g^2 + 10g - 7)$$
$$+ \sigma_1^3\sigma_3(-2g^3 + 5g^2 + g - 3) + \sigma_1^2\sigma_2^2(4g^2 - 4g + 8) + \sigma_1\sigma_2\sigma_3(-8g + 6) - 4\sigma_2^3 + \sigma_3^2 ,$$

d'où dans $\mathbb{Z}$:

$$D = 5g^6 - 25g^5 + 57g^4 - 75g^3 + 69g^2 - 30g + 10 \ ,$$

$$D > 5g^5(g-5) + 57g^4 - 75g^3 - 30g \ .$$

Or $5g^5(g-5) \geq 0$ si $g \geq 5$ et

$$57g^4 - 75g^3 - 30g = g[(57g - 75)g^2 - 30] > 0 \quad \text{si} \quad g \geq 2 \ ,$$

donc $D > 0$ si $g \geq 5$ et $D(2) = 58$; $D(3) = 703$; $D(4) = 5666$.

<u>G = G(3, 6)</u> : dim G = 9 , $H^{18}(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ à générateur σ_3^3 .

C(R) . C(Q) = 1 induit les relations :

$$\left\{\begin{array}{l}
n_1 - 3n_2 + 2n_3 + n_4 = 0 \\
n_2 - 3n_4 + 2n_5 + n_6 = 0 \\
n_3 - 3n_5 + 2n_7 + n_8 = 0 \\
n_4 - 3n_6 + 2n_8 + n_9 = 0 \\
n_5 - 3n_8 + 2n_{10} + n_{11} = 0 \\
- n_1 + 4n_2 - 3n_3 - 3n_4 + 2n_5 = 0 \\
- n_2 + 4n_4 - 3n_5 - 3n_6 + 2n_8 = 0 \\
- n_3 + 4n_5 - 3n_7 - 3n_8 + 2n_{10} = 0 \\
- n_4 + 4n_6 - 3n_8 - 3n_9 + 2n_{11} = 0 \\
n_1 - 5n_2 + 4n_3 + 6n_4 - 6n_5 - n_6 + n_7 = 0 \\
n_2 - 5n_4 + 4n_5 + 6n_6 - 6n_8 - n_9 + n_{10} = 0 \\
n_3 - 5n_5 + 4n_7 + 6n_8 - 6n_{10} - n_{11} + 1 = 0 \\
- n_1 + 6n_2 - 5n_3 - 10n_4 + 12n_5 + 4n_6 - 3n_7 - 3n_8 = 0 \\
- n_2 + 6n_4 - 5n_5 - 10n_6 + 12n_8 + 4n_9 - 3n_{10} - 3n_{11} = 0 \\
- n_2 + 6n_4 - 5n_5 - 10n_6 + 12n_8 + 4n_9 - 3n_{10} - 3n_{11} = 0 \\
n_1 - 7n_2 + 6n_3 + 15n_4 - 20n_5 - 10n_6 + 6n_7 + 12n_8 + n_9 - 3n_{10} = 0 \\
- n_1 + 8n_2 - 7n_3 - 21n_4 + 30n_5 + 20n_6 - 10n_7 - 30n_8 - 5n_9 + 12n_{10} + 4n_{11} = 1 ,
\end{array}\right.$$

<u>où</u> : $\sigma_1^9 = n_1 . \sigma_3^3$; $\sigma_1^7\sigma_2 = n_2 . \sigma_3^3$; $\sigma_1^6\sigma_3 = n_3 . \sigma_3^3$; $\sigma_1^5\sigma_2^2 = n_4 . \sigma_3^3$; $\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 = n_5 . \sigma_3^3$; $\sigma_1^3\sigma_2^3 = n_6 . \sigma_3^3$; $\sigma_1^3\sigma_3^2 = n_7 . \sigma_3^3$; $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 = n_8 . \sigma_3^3$; $\sigma_1\sigma_2^4 = n_9 . \sigma_3^3$; $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 = n_{10} . \sigma_3^3$; $\sigma_2^3\sigma_3 = n_{11} . \sigma_3^3$.

Résolvant le système, on trouve : $n_1 = 42$; $n_2 = 21$; $n_3 = 5$; $n_4 = 11$; $n_5 = 3$; $n_6 = 6$; $n_7 = 1$; $n_8 = 2$; $n_9 = 3$; $n_{10} = 1$; $n_{11} = 1$.

Calculons le résultant de :

$$\begin{cases} X^3 + (1-3g)\sigma_1 X^2 + [(3g-2)g\sigma_1^2 + \sigma_2]X + \sigma_3 - g\sigma_1\sigma_2 + g^2\sigma_1^3(1-g) \\ X^3 - \sigma_1 X^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_2)X - \sigma_3 + 2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 , \end{cases}$$

C'est-à-dire le déterminant D :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & (1-3g)\sigma_1 & (3g^2-2g)\sigma_1^2+\sigma_2 & \begin{matrix}\sigma_3-g\sigma_1\sigma_2 \\ +g^2(1-g)\sigma_1^3\end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (1-3g)\sigma_1 & (3g^2-2g)\sigma_1^2+\sigma_2 & \begin{matrix}\sigma_3-g\sigma_1\sigma_2 \\ +g^2(1-g)\sigma_1^3\end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1-3g)\sigma_1 & \begin{matrix}(3g^2-2g)\sigma_1^2 \\ +\sigma_2\end{matrix} & \begin{matrix}\sigma_3-g\sigma_1\sigma_2 \\ +g^2(1-g)\sigma_1^3\end{matrix} \\ 1 & -\sigma_1 & \sigma_1^2-\sigma_2 & -\sigma_3+2\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sigma_1 & \sigma_1^2-\sigma_2 & -\sigma_3+2\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sigma_1 & \sigma_1^2-\sigma_2 & -\sigma_3+2\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3 \end{vmatrix}$$

<u>D'où</u> : $D = (g^9 - 6g^8 + 17g^7 - 32g^6 + 45g^5 - 50g^4 + 43g^3 - 28g^2 + 14g - 4)\sigma_1^9$

$+ (6g^6 - 27g^5 + 63g^4 - 84g^3 + 78g^2 - 57g + 21)\sigma_1^7\sigma_2$

$+ (-6g^6 + 24g^5 - 41g^4 + 26g^3 - 2g^2 + 2g - 7)\sigma_1^6\sigma_3$

$+ (-g^5 - 10g^4 + 59g^3 - 110g^2 + 101g - 38)\sigma_1^5\sigma_2^2$

$+ (-30g^3 + 124g^2 - 112g + 36)\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 + (24g^2 - 48g + 20)\sigma_1^3\sigma_2^3$

$+ (-15g^3 + 30g^2 - 22g - 4)\sigma_1^3\sigma_3^2 + (-24g^2 + 56g - 52)\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3$

$+ (-4g + 8)\sigma_1\sigma_2^4 + (-12g + 24)\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 + 8\sigma_3^3 ,$

d'où dans $\mathbb{Z}$:

$$D = 42g^9 - 252g^8 + 714g^7 - 1248g^6 + 1432g^5 - 1092g^4 + 716g^3 - 260g^2 - 46g - 4 .$$

Si $g \geq 7$, il est clair que D est strictement positif. D'autre part, si $g \geq 2$ est un nombre entier solution de $\frac{D(g)}{2} = 0$, g doit diviser 2 qui est un nombre premier, donc $g = 2$. Or $D(2) = 1456$, par conséquent, $D(g)$ n'admet pas de solution entière $g \geq 2$.

En résumé, nous avons étudié 3 exemples, chacun d'eux entrant dans l'une des catégories suivantes :

1) p pair ; q pair ; $\dim G$ paire ;

2) p pair ; q impair ; $\dim G$ paire ;
(et donc aussi : p impair, q pair) ;

3) p impair ; q impair ; $\dim G$ impaire.

Dans aucun de ces cas, contrairement aux espaces projectifs, le lieu singulier d'une forme de Pfaff ne pouvait être vide, et on peut sérieusement penser que cela n'est jamais possible. Mais une démonstration requerra sans aucun doute d'autres méthodes que celles utilisées ici.

VIII. PLONGEMENT DE PLUCKER ET FORMES DE PFAFF

Soit f l'application de H dans $\mathbb{C}^N$ (où $N = \binom{p+q}{p}$) qui à toute matrice X de H associe le N-uplet constitué par les $p \times p$-mineurs de X. La restriction de f à M a la propriété suivante :

$$f(\Lambda X) = (|\alpha(\Lambda X)|) = (|\Lambda||\alpha(X)|) = |\Lambda| \cdot (|\alpha(X)|) ,$$

par conséquent $f_{|M}$ détermine une application de M dans $\mathbb{P}^{N-1}$ qui se factorise à travers G :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}^{N-1} \\ G \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Clairement, $\tilde{f}$ réalise un plongement de G dans $\mathbb{P}^{N-1}$. Remarquons au passage que ce plongement est précisément celui réalisé par le faisceau très ample $\mathcal{L}$ des sections de L^V.

On déduit aisément de ce qui précède que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G\ell(p) \times M \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "g \times f"] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & G \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^N)^* \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & (\mathbb{C}^N)^* \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{P}^{N-1} \end{tikzcd}$$

où g est le morphisme : $G\ell(p) \longrightarrow \mathbb{C}^*$

$$\Lambda \longmapsto |\Lambda| .$$

Ce diagramme induit le diagramme commutatif suivant sur les formes de Pfaff :

$$\begin{array}{ccc} H^0(P\,,\Omega^1_P(m)) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H^0(G\,,\Omega^1_G(m)) \\ \Big\downarrow \tau^* & & \Big\downarrow \pi^* \\ H^0((\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^*\,,\Omega^1_{(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^*}) & \xrightarrow{f^*} & H^0(M\,,\Omega^1_M) \end{array}$$

où les flèches verticales sont celles déduites de la proposition 2 du paragraphe III. (Rappelons que celle-ci est en particulier vraie pour les espaces projectifs).

Si maintenant, ω désigne une forme dans $H^0(P\,,\Omega^1_P(m))$, alors $\tau^*\omega \in H^0((\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^*\,,\Omega^1_{(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^*})$ est une forme du type : $\sum_\alpha \omega_\alpha\, dT_\alpha$ (T_α désignant les coordonnées dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) où les $\omega_\alpha(T_\alpha)$ sont des polynômes homogènes de degré $m-1$ vérifiant la relation $\sum_\alpha \omega_\alpha T_\alpha = 0$. Donc :

$$\pi^*\,\tilde{f}^*\omega = f^*\,\tau^*\,\omega = \sum_\alpha f^*\,\omega_\alpha\, d(f^*\,T_\alpha)\ ,$$

et comme $f^*(T_\alpha) = |\alpha(X)|$, donc que $d(f^*T_\alpha) = \sum_{i,j} \dfrac{\partial|\alpha(X)|}{\partial X_{ij}}\, dX_{ij}$, on a :

$$\pi^*\,\tilde{f}^*\,\omega = \sum_{\alpha,i,j} \omega_\alpha(|\alpha(X)|)\,\frac{\partial|\alpha(X)|}{\partial X_{ij}}\, dX_{ij} = \sum_{i,j} \omega_{ij}\, dX_{ij}\ ,$$

où $\omega_{ij} = \sum_\alpha \omega_\alpha((|\alpha(X)|))\,\dfrac{\partial|\alpha(X)|}{\partial X_{ij}}$.

Par conséquent, la restriction de la forme sur $\mathbb{P}^{\mathbb{N}-1}$ définie par $\omega = \Sigma\omega_\alpha\, dT_\alpha$, telle que $\Sigma\,\omega_\alpha . T_\alpha = 0$, est la forme sur G définie par $\omega = \Sigma\,\omega_{ij}\, dX_{ij}$, où $\omega_{ij} = \sum_\alpha \omega_\alpha((|\alpha(X)|))\,\dfrac{\partial|\alpha(X)|}{\partial X_{ij}}$.

<u>Remarque.</u> Bien évidemment, les ω_{ij} ainsi définis vérifient les relations (2) et (3) de la proposition 1, § III.

<u>Remarque</u>. Dans le cas de $G = G(2,4)$, plongé dans $\mathbb{P}^5$, on constate (cf. § IV) que toute forme de Pfaff sur G est la restriction d'une forme de Pfaff sur $\mathbb{P}^5$. Mais cela n'est pas vrai en général.

En effet, il arrive même que $h^0(P, \Omega^1_P(m))$ soit inférieur à $h^0(G, \Omega^1_G(m))$ comme le montre l'exemple $G = G(2,6)$. En effet, $G(2,6)$ est plongé dans $P = \mathbb{P}^{14}$, et :

$$h_P(m) = (m-1)\binom{m+13}{m} = (m-1)\,\frac{(m+1)\dots(m+13)}{13!} \,,$$

$$h_G(m) = \frac{1}{5!8}\,(m-1)(m+1)^2(m+2)^2(m+3)(m+4)^2(m+5) \,,$$

Par conséquent :

$$h_P(m) - h_G(m) = (m-1)\binom{m+5}{m}\left[\frac{(m+6)(m+7)\dots(m+13)}{6.7.8.9.10.11.12.13} - \frac{1}{8}\,(m+4)(m+2)(m+1)\right].$$

Cette expression est bien évidemment positive lorsque m est suffisamment grand, mais elle est négative lorsque $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots$

VIII. SOLUTIONS ALGEBRIQUES NORMALES ET FEUILLETAGES

Suivant [3], 4, page 125, nous dirons qu'une solution algébrique f d'une équation de Pfaff algébrique sur G est normale si l'hypersurface correspondante de G (i.e. : l'ensemble des points $x \in G$ tels que $f(x) = 0$) est normale ; i.e. : a un lieu singulier de codimension ≥ 2 .

PROPOSITION 3. Soit $\omega \neq 0$ une forme de Pfaff irréductible, de degré m , sur G . Si $f \in \mathbb{C}[X_{ij}]$ est une solution algébrique normale de $\omega = 0$, alors :

(i) il existe un polynôme homogène a et une 1-forme h à coefficients polynomiaux homogènes de même degré tels que :

$\omega = a \cdot df + f \cdot h$;

(ii) l'hypersurface $f = 0$ contient une composante irréductible de dimension $pq - 2$ du lieu singulier S de ω ;

(iii) on a : $d^\circ(f) \leq (m-1)p$;

(iv) on a : f divise $\omega \wedge d\omega$ dans $\Lambda^2 \Omega^1_{H/\mathbb{C}}$.

Démonstration. Le cas des espaces projectifs étant traité (cf. [3], § 4, page 126), on pourra supposer : $2 \leq p \leq (p+q) - 2$.

Soit C l'hypersurface de H ($\cong \mathbb{C}^{(p+q)}$) d'équation $f = 0$. Par hypothèse, le lieu singulier de $C \cap M$ est de codimension ≥ 2 dans C . Comme d'autre part $Y = H \dot{-} M$ est de codimension ≥ 3 dans H , (*), la codimension de $Y \cap C$ dans C est ≥ 2 et par conséquent C , qui est intersection complète, est normale.

Par hypothèse, on a : $\overline{\omega} \wedge \overline{df} = 0$ dans $\Omega^2_H \otimes_{\mathcal{O}_H} \mathcal{O}_C$, où les barres représentent les classes modulo f . Comme la section $\overline{df} : \mathcal{O}_C \longrightarrow \Omega^1_H \otimes_{\mathcal{O}_H} \mathcal{O}_C$

est localement facteur direct sur l'ouvert V, complémentaire du lieu singulier Z de C dans C, il existe $b \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ telle que $\overline{\omega} = b\,\overline{df}$ sur V.

Comme C est normale et $\operatorname{codim}(Z, C) \geq 2$, l'homomorphisme de restriction $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ est un isomorphisme, autrement dit, b se prolonge en une section, notée de même, de $\mathcal{O}_C$. D'où :

$$\overline{\omega} = b\,\overline{df} \quad \text{dans} \quad \Omega^1_H \otimes_{\mathcal{O}_H} \mathcal{O}_C \,.$$

L'assertion (i) en résulte aussitôt : on choisit un relèvement a de b dans $\Gamma(H, \mathcal{O}_H) = \mathbb{C}[X_{ij}]$, d'où une égalité du type $\omega = a df + fh$ dont on ne retient que la composante homogène de degré $mp-1$.

Pour montrer (ii), nous allons raisonner par l'absurde en supposant $\operatorname{codim}(S \cap C, C) \geq 2$.

De même que précédemment, la section $\overline{\omega} : \mathcal{O}_C \longrightarrow \Omega^1_H \otimes_{\mathcal{O}_H} \mathcal{O}_C$ est localement facteur direct en dehors d'une partie fermée de codimension ≥ 2, d'où l'existence de $c \in \Gamma(C, \mathcal{O}_C)$ tel que : $\overline{df} = c \cdot \overline{\omega}$.

Mais alors $bc = 1$, d'où $b = c^{-1}$ est inversible dans $\Gamma(C, \mathcal{O}_C)$, donc $b \in \mathbb{C}^*$.

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\omega = \lambda df + fh$. Des raisons de degré font que $h = 0$, d'où $\omega = \lambda df$. Ce qui est impossible, car la formule d'Euler entraîne :

$$0 = \Omega(X) \circ {}^tX = \lambda[\partial f] \circ {}^tX = \lambda n f(X) \cdot I \,,$$

où n est l'entier tel que $f(\Lambda X) = |\Lambda|^n f(X)$.

L'assertion (iii) résulte facilement de (i). Si on avait $d^\circ f > (m-1)p$, comme $d^\circ f$ est de la forme np, cela impliquerait que $d^\circ f \geq mp$, ce qui entraînerait nécessairement, à cause de l'égalité $\omega = a df + fh$, que $\omega = 0$.

L'assertion (iv) est aussi conséquence de (i), car alors :

$$d\omega \wedge \omega = (da \wedge df + df \wedge h + fdh) \wedge (adf + fh)$$

$$= f(da \wedge df \wedge h + adh \wedge df + fdh \wedge h) .$$

Preuve de (*) : on supposera que $p \leq (p+q)-2$. Y est une sous-variété affine de H d'anneau de fonctions :

$$A = \mathbb{C}[X_{ij} \mid i=1, \dots, p \ ; \ j=1, \dots, p+q]/I ,$$

où I est l'idéal engendré par tous les déterminants $|\alpha(X)|$ d'ordre p de la matrice (X_{ij}) .

Considérons les p-uplets α_1 , α_2 , α_3 de telle sorte que :

$$\alpha_1 = (1, 2, \dots, p)$$

$$\alpha_2 = (2, 3, \dots, p+1)$$

$$\alpha_3 = (3, 4, \dots, p+2) .$$

Alors, bien entendu, $\dim A \leq \dim(\mathbb{C}[X_{ij}]/(|\alpha_1|,|\alpha_2|,|\alpha_3|))$ (notant comme d'habitude $|\alpha|$ le déterminant $|\alpha(X)|$ correspondant au p-uplet α). Mais :

$$\mathbb{C}[X_{ij}]/(|\alpha_1|,|\alpha_2|,|\alpha_3|) = \{(\mathbb{C}[X_{ij} \mid j \leq p]/(|\alpha_1|))[X_{ij}, j>p]\}/(|\alpha_2|,|\alpha_3|).$$

Or $|\alpha_1|$ est premier dans $\mathbb{C}[X_{ij}]$, donc $B_1 = \mathbb{C}[X_{ij} \mid j \leq p]/(|\alpha_1|)$ est intègre. Par conséquent, $|\alpha_2|$ est irréductible dans $B_1[X_{ij} \mid j > p]$ et donc $B_2 = B_1[X_{ij} | j \leq p+1]/(|\alpha_2|)$ est intègre.

Par conséquent, $|\alpha_3|$ $(\neq 0)$ est un paramètre dans $B_2[X_{ij} \mid j > p+1]$, autrement dit :

$$\dim(\mathbb{C}[X_{ij}]/(|\alpha_1|,|\alpha_2|,|\alpha_3|)) = p(p+q)-3 .$$

Remarque. On pourrait en fait poursuivre le raisonnement ci-dessus et en conclure que si $\alpha_k = (k, k+1, \dots, p+k-1)$ pour tout k tel que $p+k-1 \leq$ $p+k-1 \leq p+q$, la suite $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ est une suite régulière.

COROLLAIRE 4. Si l'équation $\omega = 0$ admet t solutions normales $f_1, \ldots, f_t$ vérifiant :

$$\sum_i d^\circ(f_i) \geq 2(mp-1) ,$$

alors ω est complètement intégrable.

Démonstration. D'après (iv) de la proposition précédente, $f_1, \ldots, f_t$ divise $\omega \wedge d\omega$ qui est à coefficients homogènes de degré $2(mp-1)-1$.

COROLLAIRE 5. Si ω est une forme de Pfaff complètement intégrable sur G , $G = G(p, p+q)$, le feuilletage sur $U = G - S$ défini par ω n'a pas de feuille compacte.

Démonstration. Une telle feuille, si elle existait, serait une sous-variété analytique compacte de G , donc de $\mathbb{P}^N$ $(N = \binom{p+q}{p} - 1)$ pour le plongement de Plücker, donc algébrique d'après le théorème de Chow. Ce serait donc une solution algébrique normale de $\omega = 0$; sa compacité serait en contradiction avec la partie (ii) de la proposition.

Remarque 1. On pourra remarquer que les propositions et leurs démonstrations figurant ci-dessus peuvent se calquer, mutatis mutandis, sur le cas projectif (cf. [3], § 4, page 125).

Remarque 2. Dans [5], § 2, Proposition 2.3, J.P. Jouanolou a montré qu'en fait le polynôme a et la 1-forme h de la proposition 3 vérifient :

$$\begin{cases} a(\Lambda X) = |\Lambda|^{m-n}\, a(X) \\ {}^t\Lambda\, H(\Lambda X) = |\Lambda|^{m-n}\, H(X) . \end{cases}$$

Pour ce faire, au lieu de considérer comme ici le morphisme $\mathrm{Mon}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^{p+q}) \longrightarrow G$, on considère le morphisme $L^* \longrightarrow G$ (L^* désignant le fibré en droites canonique privé de la section nulle).

Dans le même ordre d'idée, il démontre ainsi également que lorsque $\omega = 0$ a une solution normale de degré $(m-1)p$, alors ω admet une intégrale première rationnelle de la forme : $\dfrac{f}{(\Sigma\, a_\alpha \,|\alpha(X)|)^{m-1}}$.

Questions. On peut se poser la question d'une éventuelle généralisation du corollaire 5 ci-dessus (cf. Proposition 4.2 de [3]), à savoir : aucun feuilletage algébrique non trivial sur une grassmanienne n'admet-il de feuille compacte ? Question liée à la suivante : peut-on trouver un système de Pfaff algébrique admettant pour solution une variété projective lisse dont le fibré normal ne soit pas ample ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. GRIFFITHS et J. HARRIS. Principles of algebraic geometry. Pure and applied Mathematics. Wiley Interscience Series (1978).

[2] R. HARTSHORNE. Local cohomology. Springer Verlag. Lecture Notes in Mathematics n° 41 (1967).

[3] J.P. JOUANOLOU. Equations de Pfaff algébriques. Springer Verlag. Lecture Notes in Mathematics n° 708 (1979).

[4] A. LASCOUX. Thèse, Paris (1977).

[5] J.P. JOUANOLOU. Intégrales de Darboux et feuilles compactes. Publications de l'IRMA (1978).

[6] R.P. STANLEY. Theory and Application of Plane Partition. Part 2. Studies in Appl. Math., n° 50 (1971).