Multiplicité et Dépendance intégrale sur un Idéal

D. Schaub
Département de Mathématiques
Université Louis Pasteur
Strasbourg I

22 septembre 1975

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce travail est de préciser les relations entre les notions de dépendance intégrale sur un idéal de définition d'un anneau noethérien local et de multiplicité de l'anneau pour cet idéal.

Dans les deux premiers paragraphes du chapitre I, on met au point les outils nécessaires. Il s'agit d'une part de lemmes techniques qu'on ne trouve pas dans la littérature, d'autre part de résultats plus classiques que nous rappelons sans démonstration. On attaque ensuite le théorème fondamental concernant le sujet :

Théorème 1.0.1 *(Rees [1]) : Soit $\mathcal{R}$ un anneau noethérien, local, analytiquement équidimensionnel, et soit $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de définition de $\mathcal{R}$ tels que $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$. Alors $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ définissent la même multiplicité pour $\mathcal{R}$ si et seulement si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.*

Compte tenu des difficultés apparaissant dans la démonstration de Rees et de l'extrême simplicité du résultat en dimension 1, nous avons naturellement cherché à démontrer ce théorème par récurrence sur la dimension de $\mathcal{R}$ en utilisant $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}\mathcal{R}$, le gradué associé au plus grand des deux idéaux étudiés. Cette démonstration fait l'objet du chapitre II de ce travail. Il apparaît en premier lieu que le théorème de Rees est équivalent au résultat d'apparence technique suivant :

Théorème 1.0.2 *Soit x un élément de $\mathfrak{a}$ dont la forme dominante $\overline{x}$ est un paramètre homogène de $gr_{\mathfrak{a}}\mathcal{R}$, alors l'application naturelle*

$$\frac{gr_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})}{\overline{x}} \to gr_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\mathcal{R}}{x}\right)$$

a un noyau nilpotent.

Le plan de la nouvelle démonstration est alors simple. On démontre le théorème 1.0.2 dans le cas particulier où $\mathbf{Proj}(gr_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R}))$ vérifie la condition (S_1) de Serre. On en déduit le théorème de Rees général pour les anneaux universellement caténaires et japonais par une simple réduction et enfin le résultat 1.0.2 général pour les mêmes anneaux. (Signalons que dans un rapport non publié B. Tessier a récemment fourni une autre démonstration du théorème de Rees pour les mêmes anneaux).

Enfin au chapitre II, utilisant le théorème de connexité de Zariski et le théorème 1.0.2 pour faire la récurrence, nous démontrons le résultat suivant concernant les propriétés de connexité du diviseur spécial de l'éclaté d'un idéal de définition :

Théorème 1.0.3 *Soit $\mathcal{R}$ un anneau noethérien, local, universellement caténaire et japonais, de profondeur r. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de $\mathcal{R}$ et soient $x_1, \ldots, x_{r-2}$ une suite régulière d'éléments de $\mathcal{R}$ dont les formes dominantes $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{r-2}$ appartiennent à un système de paramètres homogènes de $gr_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})$. Alors le schéma*

$$Proj\left(\frac{gr_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})}{(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{r-2})}\right)$$

est connexe.

Chapitre 2

Généralités

(Tous les anneaux considérés sont noethériens).

2.1 Idéal entier sur un autre et relation avec le gradué associé

Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

2.1.1 Idéal entier et clôture intégrale d'un idéal

Definition 2.1.1 *On dira qu'un élément x de A est entier sur un idéal $\mathfrak{a}$ de A s'il existe un entier n et des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ avec $\alpha_i \in \mathfrak{a}^i$ tels que*

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_i x^{n-i} + \cdots + \alpha_n = O.|$$

Definition 2.1.2 *On dira qu'un idéal $\mathfrak{a}$ de A est entier sur un idéal $\mathfrak{b}$ de A si $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ et si tout élément de $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.*

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A. L'anneau A est naturellement filtré par les puissances $\mathfrak{a}^n, \quad n \geq 0$, de l'idéal $\mathfrak{a}$. Associons-lui le groupe gradué $\overline{A}$ somme directe des $\mathfrak{a}^n$, $n \geq 0$, : $\overline{A} = \sum \mathfrak{a}^n$. Les applications canoniques $\mathfrak{a}^p \times \mathfrak{a}^q \to \mathfrak{a}^{p+q}$ définissent une multiplication sur $\overline{A}$ et ainsi $\overline{A}$ se trouve muni d'une structure d'anneau gradué.

Remark 2.1.3 *$\overline{A}$ peut être considéré comme le sous-anneau gradué $A[a_1T, \ldots, a_nT]$ de $A[T]$ où les a_i forment un système minimal de générateurs de $\mathfrak{a}$ et où T est une indéterminée sur A.*

Proposition 2.1.4 *Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de A tels que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$;
i') il existe $n > 0$ tel que $\mathfrak{a}^n$ est entier sur $\mathfrak{b}^n$;
ii) $\mathfrak{a}^n$ est entier sur $\mathfrak{b}^n$ pour tout $n > 0$;
iii) l'anneau gradué $\sum \mathfrak{a}^n$ est entier sur l'anneau gradué $\sum \mathfrak{b}^n$;
iv) il existe un entier positif k tel que $\mathfrak{a}^{k+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^k$;

v) il existe un entier positif k tel que, pour tout $n > k$, $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{b}^{n-k}\mathfrak{a}^k$.

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (iv) : soit $z \in \mathfrak{a}$, alors z est entier sur $\mathfrak{b}$, autrement dit z satisfait à une équation de dépendance intégrale de la forme

$$z^q + \alpha_1 z^{q-1} + \cdots + \alpha_i z^{q-i} + \cdots + \alpha_q = 0$$

où q est un entier positif, α_i est un élément de $\mathfrak{b}^i$ pour tout $i = 1, \ldots, q$.

Or $\alpha_i z^{q-i}$ est un élément de $\mathfrak{b}^i\mathfrak{a}^{q-i}$, donc a fortiori un élément de $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{q-1}$ pour tout i, d'où z^q est un élément de $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{q-1}$.

Soient $z_1, \ldots, z_\mu$ des générateurs de $\mathfrak{a}$, alors pour tout $i = 1, \ldots, \mu$, il existe un entier positif q_i tel que $z_i^{q_i}$ est dans $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{q_i-1}$. Soit q la borne supérieure des q_i, on a alors évidemment : $z_i^q \in \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{q-1}$, on en déduit donc que : $\mathfrak{a}^{q_\mu} \subset \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{q_\mu-1}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) De (iv), on déduit facilement que $\sum \mathfrak{A}^n$ est un ($\sum \mathfrak{b}^n$-module gradué de type fini, et , par conséquent que $\sum \mathfrak{a}^n$ est entier sur $\sum \mathfrak{b}^n$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Soit z un élément de $\mathfrak{a}^n$. Considérons-le comme élément homogène de degré n de $\sum \mathfrak{a}^n$, alors, d'après (iii), il existe une équation de dépendance intégrale de z sur $\sum \mathfrak{b}^n$ de la forme :

$$z^q + \alpha_1 z^{q-1} + \cdots + \alpha_i z^{q-i} + \cdots + \alpha_q = 0$$

où α_i est un élément homogène de degré ni de $\sum \mathfrak{b}^n$. Autrement dit, il existe un entier positif q et des éléments α_i de $(\mathfrak{b}^n)^i$ tels que

$$z^q + \alpha_1 z^{q-1} + \cdots + \alpha_i z^{q-i} + \cdots + \alpha_q = O,$$

c'est-à-dire que z est entier sur $\mathfrak{b}^n$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) et (iv) $\Longrightarrow$ (v) sont des évidences.

(i) *implies* (i') se déduit immédiatement de l'équivalence de (i) et (iv).

C.Q.F.D

Lemma 2.1.5 *Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont trois idéaux de A, $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{c}$, tels que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}$ est entier sur $\mathfrak{c}$, alors $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{c}$.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des conditions (iv) et (v) de la proposition 2.1.4. En effet, d'après (v), il existe un entier k tel que, pour tout $n \geq k$, $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{b}^{n-k}\mathfrak{a}^k$ et d'après (iv), il existe un entier ℓ tel que $\mathfrak{b}^{\ell+1} = \mathfrak{c}\mathfrak{b}^\ell$, par conséquent :

$$\mathfrak{a}^{k+\ell+1} = \mathfrak{b}^{\ell+1}\mathfrak{a}^k = \mathfrak{c}\mathfrak{b}^\ell\mathfrak{a}^k \subset \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{k+\ell} \subset \mathfrak{a}^{k+\ell+1},$$

d'où : $\mathfrak{a}^{k+\ell+1} = \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{k+\ell}$.

C.Q.F.D

Proposition 2.1.6 *Si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux de A, alors l'idéal $\mathfrak{a} + I/I$ de A/I est entier sur l'idéal $\mathfrak{b} + I/I$ de A/I pour tout idéal de A.*

La démonstration en est immédiate.

Proposition 2.1.7 *Si l'idéal I est contenu dans le nilradical de A, alors si $\mathfrak{a}+I/I$ est entier sur $\mathfrak{b}+I/I$, $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.*

Démonstration : Soit π la surjection canonique de A dans A/I, alors, par hypothèse, il existe une équation de dépendance intégrale de $\pi(x)$ sur $\mathfrak{b}+I/I$ de la forme :

$$\pi(x)^q+\alpha_1\pi(x)^{q-1}+\cdots+\alpha_q=O$$

sur A/I, où $\alpha_i \in (\mathfrak{b}+I/I)^i$, pour tout $x \in \mathfrak{a}$.

Par conséquent, il existe des β_i dans $\mathfrak{b}^i$ et un élément n dans I tel que :

$$x^q+\beta_1x^{q-1}+\cdots+\cdots+\beta_q=n.$$

Mais, I étant inclus dans le nilradical de A, il existe $k>0$ tel que $n^k=0$, d'où :

$$(x^q+\beta_1x^{q-1}+\cdots+\beta_q)^k=0,$$

ce qui se traduit par une équation de dépendance intégrale de x sur $\mathfrak{b}$.

C.Q.F.D

Corollary 2.1.8 *([7]) Pour que $\mathfrak{a}$ soit entier sur $\mathfrak{b}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A.*

Démonstration : La nécessité de la condition est donnée par **??**. Supposons donc la condition vérifiée, on en déduit immédiatement que, si $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_k$ dénotent les idéaux premiers minimaux de A, il existe des entiers r_i tels que

$$\mathfrak{a}^{r_i+1}\subset\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{r_i}+\mathfrak{p}_i,\ \text{pour tout } i=1,\ldots,k.$$

D'où si r est la borne supérieure de tous les r_i,

$$\mathfrak{a}^{r+1}\subset\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{r}+\mathfrak{p}_i,\ \text{pour tout } i=1,\ldots,k$$

et comme $\mathfrak{a}^{r+1}\supset\mathfrak{b}\mathfrak{a}^r$, on a :

$$\mathfrak{a}^{r+1}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}^r+(\mathfrak{p}_i+\mathfrak{a}^{r+1}).$$

D'où $\mathfrak{a}^{sk(r+1}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{sk(r+1)-1}$ et $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

C.Q.F.D

Proposition 2.1.9 *S'il existe un A-module de type fini M tel que $Supp(M)=SpecA$ et que $\mathfrak{a}M\subset\mathfrak{b}M$, alors $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.*

Réciproquement, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ont pour supports $SpecA$ tout entier, et si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, alors il existe un A-module de type fini M tel que $Supp(M)=SpecA$ et $\mathfrak{a}M\subset\mathfrak{b}M$.

Démonstration : M étant un A-module de type fini, soit $u_1, \ldots, u_s$ un système de générateurs de M.

Montrons que tout élément x de $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$. En effet, pour tout $i = 1, \ldots, s$,

$$xu_i = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j^i u_j \text{ où } \alpha_j^i \in \mathfrak{b}.$$

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} x - \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_j^1 \\ \alpha_1^2 & x - \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^s & \alpha_2^s & \cdots & x - \alpha_s^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix} = (0).$$

Si D est le déterminant de cette matrice, on en conclut que $Du_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, s$; autrement dit $DM = 0$. Mais comme $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Spec}A$, cela signifie que D est nilpotent. Or D s'écrit $x^s + \beta_1 x^{s-1} + \cdots + \beta_q$ avec $\beta_i \in \mathfrak{b}^i$ et dire qu'il existe un $n > 0$ tel que $(x^s + \beta_1 x^{s-1} + \cdots + \beta_q)^n = 0$ signifie exactement que x satisfait à une équation de dépendance intégrale sur $\mathfrak{b}$.

Réciproquement, si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, il existe $k > 0$ tel que $\mathfrak{a}^{k+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^k$. Prenons pour M l'idéal $\mathfrak{a}^k$, alors, d'une part, $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Spec}A$ par hypothèse et d'autre part $\mathfrak{a}M \subset \mathfrak{b}M$.

C.Q.F.D

Corollary 2.1.10 *Soient $\overline{A}$ une algèbre finie sur A telle que l'application de Spec($\overline{A}$)) dans SpecA soit surjective et $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de A tels que $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$.*

Si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{a}\overline{A}$ est entier sur $\mathfrak{b}\overline{A}$.

Réciproquement, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ont pour support SpecA tout entier et si $\mathfrak{a}\overline{A}$ est entier sur $\mathfrak{b}\overline{A}$, alors $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

Démonstration : La première assertion est bien claire.

Réciproquement, si $\mathfrak{a}\overline{A}$ est entier sur $\mathfrak{b}\overline{A}$, il existe d'après 2.1.9 un $\overline{A}$-module de type fini M tel que $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Spec}\overline{A}$ et $(\mathfrak{a}\overline{A})M \subset (\mathfrak{b}\overline{A})M$. Mais M peut aussi être considéré comme un A-moduel de type fini et en tant que tel $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Spec}A$ (à cause de la surjection de $\mathrm{Spec}(\overline{A})$ sur $\mathrm{Spec}A$ et $\mathfrak{a}M \subset \mathfrak{b}M$, d'où (2.1.9) $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

C.Q.F.D

Definition 2.1.11 *On dira qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est intégralement clos si tout élément de A entier sur $\mathfrak{a}$ est dans $\mathfrak{a}$.*

Proposition 2.1.12 *L'ensemble $\overline{\mathfrak{a}}$ des éléments de A entiers sur un idéal $\mathfrak{a}$ est un idéal intégralement clos.*

La démonstration se déduit aisément du lemme 2.1.5.

Definition 2.1.13 *On dira qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est basique s'il n'est entier sur aucun idéal strictement contenu dans $\mathfrak{a}$ (cf. [7].*

2.1.2 Relation avec le gradué associé

Pour étudier plus précisément cette notion d'idéal entier sur un autre, la méthode du gradué associé semble la plus naturelle, surtout au vu de la proposition 2.1.18 que nous allons démontrer.

Suivant la notation habituelle, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, nous noterons $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ l'ensemble gradué $\sum_{n\geq 0} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ muni de sa structure naturelle d'anneau gradué.

A étant un anneau local, l'intersections de tous les idéaux $\mathfrak{a}^n$ est nulle, par conséquent, pour tout élément x de A, non nul, il existe un entier $n > 0$ tel que x est dans $\mathfrak{a}^n$ et n'est pas dans $\mathfrak{a}^{n+1}$. Soit alors $\overline{x}$ l'image canonique de x dans $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$.

Definition 2.1.14 *Nous appellerons $\overline{x}$ la forme dominante de x. C'est un élément homogène de degré n de l'anneau gradué $gr_{\mathfrak{a}}(A)$.*

Remark 2.1.15 *Si $x = 0$, nous poserons $\overline{x} = 0$; alors si x est un élément de A et $\overline{x}$ sa forme dominante, $\overline{x} = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Definition 2.1.16 *Si $\mathfrak{R}$ est un anneau gradué $\mathfrak{R} = \sum_{n\geq 0} \mathfrak{R}_n$, on dira qu'un idéal gradué est irrelevant s'il contient une puissance de l'idéal gradué $\sum_{n\geq 1} \mathfrak{R}_n$ ou encore s'il contient $\mathfrak{R} = \sum_{n\geq k} \mathfrak{R}_n$ pour un certain entier positif k.*

Proposition 2.1.17 *(cf. [1], page 198). Soient $\mathfrak{R} = \sum_{n\geq 0} \mathfrak{R}_n$ une algèbre graduée de type fini sur $\mathfrak{R}_0$ où $\mathfrak{R}_0$ est un anneau commutatif unitaire quelconque et soient $z_0, \ldots, z_m$ des éléments homogènes de $\mathfrak{R}$. Alors $z_0, \ldots, z_m$ engendrent un idéal irrelevant de $\mathfrak{R}$ si et seulement si $\mathfrak{R}$ est entier sur l'anneau $S = \mathfrak{R}_0[z_0, \ldots, z_m]$.*

Proposition 2.1.18 *Soit A un anneau local et $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de définition de A tels que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$. Alors $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$ si et seulement si $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2$ engendre un idéal irrelevant de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$.*

Démonstration : 1) Condition nécessaire : pour montrer la nécessité de cette condition, il suffit d'après 2.1.17, de montrer que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ est entier sur $(A/\mathfrak{a})[\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$ et pour cela, il suffit de montrer que tout élément homogène de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ est entier sur $(A/\mathfrak{a})[\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$.

Soit $\overline{z} \in \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$, alors il existe un élément z de $\mathfrak{a}^n$, non élément de $\mathfrak{a}^{n+1}$, dont la forme dominante est $\overline{z}$. Or, du moment que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^n$ est entier sur $\mathfrak{b}^n$ (2.1.4, (ii)), par conséquent z est entier sur $\mathfrak{b}^n$ et il existe une équation de dépendance intégrale de z sur $\mathfrak{b}^n$ de la forme :

$$z^q + \alpha_1 z^{q-1} + \cdots + \alpha_i z^{q-i} + \cdots + \alpha_q = 0 \text{ avec } \alpha_i \in \mathfrak{b}^{ni}.$$

Mais $\overline{z}^q$ est, par définition, l'image de z^q dans $\mathfrak{a}^{nq}/\mathfrak{a}^{nq+1}$, par conséquent $\overline{z}^q$ est l'image dans $\mathfrak{a}^{nq}/\mathfrak{a}^{nq+1}$ de $-(\alpha_1 z^{q-1} + \cdots + \alpha_q)$. En retranchant de cette dernière expression les $\alpha_i z^{q-i}$ qui sont dans $\mathfrak{a}^{nq+1}$ et ceux dont la somme est dans $\mathfrak{a}^{nq+1}$, on en déduit que :

$$\overline{z}^q = -\sum_{i\in I} \overline{\alpha}_i \cdot \overline{z}^{q-i} \text{ où } I \subset \{1, \ldots, q\},$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\overline{z}^q + \sum_{i\in I} \overline{\alpha}_i \cdot \overline{z}^{q-i} = 0 \text{ où } \overline{\alpha}_i \in \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{ni-1} + \mathfrak{a}^{ni+1}}{\mathfrak{a}^{ni+1}}.,$$

c'est-à-dire : $\overline{\alpha}_i \in (A/\mathfrak{a})[\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$. Donc $\overline{z}$ est bien entier sur $(A/\mathfrak{a})[\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$.

2) Condition suffisante : Toujours d'après la proposition 2.1.17, l'hypothèse implique que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ est entier sur $(A/\mathfrak{a})[\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$, ce qui signifie encore que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ est un $(A/\mathfrak{a})[\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2]$-module gradué de type fini (gradué parce que précisément $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2$ est de degré 1 dans $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$.

Soient alors $g_1, \ldots, g_m$ des générateurs homogènes de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, autrement dit :

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A) = \left(\frac{A}{\mathfrak{a}}\right)\left[\frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}^2}\right] \cdot g_1 + \cdots + \left(\frac{A}{\mathfrak{a}}\right)\left[\frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}^2}\right] \cdot g_m.$$

Soit μ le plus grand des degrés des g_i, alors :

$$\frac{\mathfrak{a}^n}{\mathfrak{a}^{n+1}} \subset \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{A}{\mathfrak{a}}\right)\left[\frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}^2}\right] \cdot \left(\frac{\mathfrak{a}^k}{\mathfrak{a}^{k+1}}\right)$$

et l'inclusion inverse étant toujours vérifiée, on en déduit que :

$$\frac{\mathfrak{a}^n}{\mathfrak{a}^{n+1}} = \left(\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{n-\mu-1} + \mathfrak{a}^{n-\mu+1}}{\mathfrak{a}^{n-\mu+1}}\right) \cdot \left(\frac{\mathfrak{a}\mu}{\mathfrak{a}^{\mu+1}}\right) = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{n-1} + \mathfrak{a}^{n+1}}{\mathfrak{a}^{n+1]}} \text{ pour tout } n \geq \mu.$$

D'où $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{n-1} + \mathfrak{a}^{n+1}$, ce qui implique, d'après le lemme de Nakayama, que $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{n-1}$ pour tout $n \geq \mu$, autrement dit que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

C.Q.F.D

Corollary 2.1.19 *Tout système de paramètres de A est basique.*

Démonstration : Soit $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ un système de paramètres de A et supposons qu'il existe un idéal $\mathfrak{b} \subset \underline{x}$ tel que $\underline{x}$ est entier sur $\mathfrak{b}$. Alors en vertu de la proposition 2.1.18, $\mathfrak{b} + \underline{x}^2/\underline{x}^2$ engendre un idéal irrelevant de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, d'où également $\mathfrak{b} + \mathfrak{m}\underline{x}/\mathfrak{m}\underline{x}$ engendre un idéal irrelevant de $\mathrm{gr}_{\underline{x}}(A) \otimes_A A/\mathfrak{m}$ qui est un anneau de polynômes $(A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_d]$ sur le corps $A/\mathfrak{m}$. Or le seul idéal irrelevant engendré par ses éléments de degré 1 d'un anneau de polynômes sur un corps k, $k[X_1, \ldots, X_d]$ est l'idéal $(X_1, \ldots, X_d)$. Par conséquent $\mathfrak{b} + \mathfrak{m}\underline{x}/\mathfrak{m}\underline{x} = \underline{x}/\mathfrak{m}\underline{x}$, d'où $\mathfrak{b} + \mathfrak{m}\underline{x} = \underline{x}$ et d'après le lemme de Nakayama $\mathfrak{b} = \underline{x}$.

C.Q.F.D

Corollary 2.1.20 *Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de définition de A tels que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}$ est basique*
2. *$\mathfrak{b}$ est un système de paramètres sur lequel $\mathfrak{a}$ est entier*

3. *$\mathfrak{b}$ est un système de paramètres dont les formes dominantes dans $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ forment un système de paramètres de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$.*

Démonstration : 1) $\Longrightarrow$ 3) : En vertu de la proposition 2.1.18, $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^2/\mathfrak{a}^2$ engendre un idéal irrelevant de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$; par conséquent, il existe dans $\mathfrak{b}$ des éléments $x_1,\dots,x_d$ tels que leurs formes dominantes dans $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ forment un système de paramètres de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$. Mais alors $\mathfrak{a}$ est entier sur $(x_1,\dots,x_d)$ et a fortiori $\mathfrak{b}$ est entier sur $(x_1,\dots,x_d)$, d'où puisque $\mathfrak{b}$ est basique, $\mathfrak{b}=(x_1,\dots,x_d)$.

3) $\Longrightarrow$ 2) devient évident d'après 2.1.18.

2) $\Longrightarrow$ 1) est précisément le corollaire 2.1.19.

C.Q.F.D

Corollary 2.1.21 *(cf. [7]) Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de définition de A tels que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, alors il existe au moins un idéal basique $\mathfrak{c}$ inclus dans $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{c}$.*

Démonstration : Il suffit de prendre pour $\mathfrak{c}$ un système de paramètres inclus dans $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b}$ soit entier dessus. Un tel système existe d'après la proposition 2.1.18, en prenant dans $\mathfrak{b}$ des éléments $x_1,\dots,x_d$ tels que $\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_d$ forment un système de paramètres de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$.

C.Q.F.D

Proposition 2.1.22 *$\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux de définition de A tels que $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$ si et seulement si $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est entier sur $gr_{\mathfrak{b}}(A)$.*

Cela peut se voir immédiatement comme corollaire de 2.1.4 ou comme corollaire de 2.1.18.

2.2 Multiplicité d'un idéal de définition

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A et M un A-module de type fini, alors la longueur du A-module $M/\mathfrak{a}^nM$ est, pour n assez grand, un polynôme en n de degré $k=\dim M$ dont le terme de plus haut degré est de la forme

$$e_{\mathfrak{a}}(M)\cdot\frac{n^k}{k!}$$

où $e_{\mathfrak{a}}(M)$ est un entier positif.

Definition 2.2.1 $e_{\mathfrak{a}}(M)$ *sera appelé multiplicité de M pour l'idéal $\mathfrak{a}$ (lorsqu'il s'agira de* $e_{\mathfrak{a}}(A)$*, nous dirons multiplicité de $\mathfrak{a}$).*

Propriétés immédiates :

1. Si $\mathfrak{a}$et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de définition tels que $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{b}$, alors pour tout A-module M, $e_{\mathfrak{a}}(M)\leq a_{\mathfrak{b}}(M)$.

2. si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A et M un A-module de dimension k ($= \dim(A/\mathrm{Ann}(M))$), alors $e_{\mathfrak{a}^n}(M) = n^k \cdot e_{\mathfrak{a}}(M)$.

Rappelons encore quelques résultats généraux sur la multiplicité ; et tout d'abord le théorème de Samuel (additivité de la multiplicité) :

Théorème 2.2.2 *Si $0 \to N \to M \to P \to 0$ est une suite exacte de A-modules de mêmes dimensions, alors $e_{\mathfrak{a}}(M) = e_{\mathfrak{a}}(N) + e_{\mathfrak{a}}(P)$.*

Corollary 2.2.3 *Si A est un anneau intègre et japonais et $\overline{A}$ sa clôture intégrale et si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A, alors $e_{\mathfrak{a}\overline{A}} = e_{\mathfrak{a}}(A)$.*

Démonstration : Soit C le conoyau de l'injection de A dans $\overline{A}$. comme A et $\overline{A}$ ont même corps de fractions, $\dim C < \dim A = \dim \overline{A}$, et, par conséquent, $e_{\mathfrak{a}}(\overline{A}) = e_{\mathfrak{a}}(A)$. 5il faut supposer A japonais pour que C soit un A-module de type fini).

Proposition 2.2.4 *([4], théorème 3) Si A est un anneau local de dimension d, $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A et M un module de type fini, de dimension d sur A et si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ sont les idéaux premiers minimaux du support de M tels que $\dim(A/\mathfrak{p}_i) = d$, alors :*

$$e_{\mathfrak{a}}(M) = \sum_{i=1}^{s} e_{\mathfrak{a}}(\frac{M}{\mathfrak{p}_i M}) \cdot \ell(M_{\mathfrak{p}_i}).$$

Corollary 2.2.5 *Soit A un anneau local de dimension d. Si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ sont les idéaux premiers minimaux de A tels que $\dim(A/\mathfrak{p}_i) = d$ et si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de définition de A, $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$ si et seulement si $e_{\mathfrak{a}}(\frac{A}{\mathfrak{p}_i)}) = e_{\mathfrak{b}}(\frac{A}{\mathfrak{p}_i})$.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.4. En effet,

$$e_{\mathfrak{a}}(A) = \sum_{i=1}^{s} e_{\mathfrak{a}}(\frac{A}{\mathfrak{p}_i}) \cdot \ell(\frac{A}{\mathfrak{p}_i})$$

et

$$e_{\mathfrak{b}}(A) = \sum_{i=1}^{s} e_{\mathfrak{b}}(\frac{A}{\mathfrak{p}_i}) \cdot \ell(\frac{A}{\mathfrak{p}_i})$$

par conséquent $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$ si et seulement si $e_{\mathfrak{a}}(\frac{A}{\mathfrak{p}_i}) = e_{\mathfrak{b}}(\frac{A}{\mathfrak{p}_i})$ pour tout $i = 1, \ldots, s$.

C.Q.F.D

La proposition qui qui suit est un des outils le plus souvent utilisés dans la suite de ce travail et généralise la notion d'élément superficiel ([2], page 285) de Zariski et Samuel.

Proposition 2.2.6 *Soit A un anneau local de dimension d, $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A et x dans $\mathfrak{a}$ un paramètre de A. Alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(\frac{A}{x})$ si et seulement si la forme dominante $\overline{x}$ de x est un paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ et si la dimension de l'annulateur de x est inférieure ou égale à $d-2$.*

Démonstration : *Condition suffisante :* Soit x dans A tel que $\overline{x}$ soit paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$. La graduation de degré n de l'annulateur de $\overline{x}$ dans $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ n'est autre que :

$$(0 : \overline{x})_n = \frac{\mathfrak{a}^{n+2} : x \cap \mathfrak{a}^n}{\mathfrak{a}^{n+1}}.$$

Or $\overline{x}$ étant paramètre, la dimension de cet annulateur est inférieure ou égale à $d-1$ et, par conséquent, la longueur de $(0 : \overline{x})_n$, notée $\ell[(0 : \overline{x})_n]$, est, pour n assez grand, un polynôme de degré inférieur ou égal à $d-2$.

Par ailleurs, toujours pour n assez grand, $\ell(\dfrac{A}{\mathfrak{a}^n + x})$ et $\ell(\dfrac{\mathfrak{a}^{n-1}}{\mathfrak{a}^n})$ sont des polynômes de degré $d-1$ dont les coefficients des termes de plus haut degré sont respectivement

$$\frac{e_{\mathfrak{a}}(A/x)}{(d-1)!} \text{ et } \frac{e_{\mathfrak{a}}(A)}{(d-1)!}.$$

Par conséquent, pour montrer que que $e_{\mathfrak{a}}(A/x)$ est égal à $e_{\mathfrak{a}}(A)$, il suffit de voir que le polynôme :

$$\ell\left(\frac{A}{\mathfrak{a}^n + x}\right) - \ell\left(\frac{\mathfrak{a}^{n-1}}{\mathfrak{a}^n}\right)$$

est de degré inférieur ou égal à $d-2$. Or,

$$\ell\left(\frac{A}{\mathfrak{a}^n + x}\right) - \ell\left(\frac{\mathfrak{a}^{n-1}}{\mathfrak{a}^n}\right) = \ell\left(\frac{\mathfrak{a}^n : x}{\mathfrak{a}^{n-1}}\right). \tag{2.1}$$

Il suffit donc de montrer que $\ell\left(\frac{\mathfrak{a}^n : x}{\mathfrak{a}^{n-1}}\right)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $d-2$.

Du lemme d'Artin-Rees, on déduit facilement qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $n \geq k$, $\mathfrak{a}^n : x = \mathfrak{a}^{n-k}(\mathfrak{a}^k : x) + (0 : x)$.

Par ailleurs, on a la chaîne d'inclusions suivantes :

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k} \supset (\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+1} \supset \cdots \supset (\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j} \\ \supset (\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j+1} \cdots \supset (\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-2} \supset \mathfrak{a}^{n-1}.\end{aligned}$$

Evaluons la longueur du module suivant :

$$\frac{(\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j}}{(\mathfrak{a}^n : x \cap \mathfrak{a}^{n-k+j+1}} \cong \frac{(\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j} + \mathfrak{a}^{n-k+j+1}}{\mathfrak{a}^{n-k+j+1}}.$$

Or, $\mathfrak{a}^n : x \subset \mathfrak{a}^{n-k+j+2} : x$ pour $j \leq k-2$ et $\mathfrak{a}^{n-k+j+1} \subset (\mathfrak{a}^{n-k+j+2} : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j}$, par conséquent,

$$(\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j} + \mathfrak{a}^{n-k+j+1} \subset (\mathfrak{a}^{n-k+j+2} : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j},$$

d'où

$$\ell\left(\frac{\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j}}{(\mathfrak{a}^n : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j+1}}\right) \leq \ell\left(\frac{\mathfrak{a}^{n-k+j+2} : x) \cap \mathfrak{a}^{n-k+j}}{\mathfrak{a}^{n-k+j+1}}\right)$$

cette dernière longueur n'étant autre que $\ell((0 : \overline{x})_{n-k+j})$ pour $j \leq k-2$. Or, on a vu ci-dessus que $\ell((0 : \overline{x})_{n-k+j})$ est, pour n assez grand, un polynôme en $n-k+j$ de degré inférieur ou égal à $d-2$, qu'on notera $P(n-k+j)$.

D'autre part, $\ell\left(\dfrac{\mathfrak{a}^n : x}{(\mathfrak{a}^n : x)\cap\mathfrak{a}^{n-k}}\right) = \ell\left(\dfrac{\mathfrak{a}^n : x + \mathfrak{a}^{n-k}}{\mathfrak{a}^{n-k}}\right)$ et, comme on a vu que $\mathfrak{a}^n : x \subset \mathfrak{a}^{n-k} + 0 : x$, on en déduit que :

$$\ell\left(\frac{\mathfrak{a}^n : x}{(\mathfrak{a}^n : x)\cap\mathfrak{a}^{n-k}}\right) = \ell\left(\frac{(0 : x) + \mathfrak{a}^{n-k}}{\mathfrak{a}^{n-k}}\right) = \ell\left(\frac{0 : x}{(0 : x)\cap\mathfrak{a}^{n-k}}\right)$$

cette dernière longueur étant évidemment inférieure ou égale à

$$\ell\left(\frac{0 : x}{(0 : x)\mathfrak{a}^{n-k}}\right)$$

qui est, pour n assez grand, un polynôme en n, noté $Q(n)$, de degré inférieur ou égal à $d-2$ puisqu'on a pris soin de choisir x tel que $\dim(0 : x) \leq d-2$.

En résumé : comme

$$\ell\left(\frac{\mathfrak{a}^n : x}{\mathfrak{a}^{n-1}}\right) = \ell\left(\frac{\mathfrak{a}^n : x}{(\mathfrak{a}^n : x)\cap\mathfrak{a}^{n-k}}\right) + \ell\left(\frac{(\mathfrak{a}^n : x)\cap\mathfrak{a}^{n-k}}{\mathfrak{a}^{n-1}}\right),$$

on en déduit que, pour n suffisamment grand, $\ell\left(\dfrac{\mathfrak{a}^n : x}{\mathfrak{a}^{n-1}}\right)$ est un polynôme en n inférieur ou égal au polynôme en n : $Q(n) + \sum_{j=0}^{k-2} P(n-k+j)$, qui est de degré inférieur ou égal à $d-2$ et par conséquent, $\ell\left(\dfrac{\mathfrak{a}^n : x}{\mathfrak{a}^{n-1}}\right)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $d-2$, d'où $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/x)$.

Condition nécessaire : Soit x un paramètre de A tel que $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/x)$.

1) On en déduit tout d'abord, d'après (2.1), et comme x est paramètre, que $\ell\left(\dfrac{\mathfrak{a}^n : x}{\mathfrak{a}^n}\right)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $d-2$.

Comme $\ell((0 : \overline{x})_{n-1}) = \ell\left(\dfrac{(\mathfrak{a}^{n+1} : \mathfrak{x})\cap\mathfrak{a}^{n-1}}{\mathfrak{a}^n}\right)$, on en déduit que c'est évidemment, pour n assez grand, un polynôme de degré inférieur ou égal à $d-2$, ce qui signifie que la dimension de $(0 : \overline{x})$ est inférieure ou égale à $d-1$, c'est-à-dire que $\overline{x}$ est paramètre de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$.

2) D'autre part, x est dans $\mathfrak{a}$ et x n'est pas dans $\mathfrak{a}^2$, sinon $\mathfrak{a}^{n+1} : x \supset \mathfrak{a}^{n-1}$ et alors

$$\ell\left(\frac{\mathfrak{a}^{n+1} : x}{\mathfrak{a}^n}\right) = \ell\left(\frac{\mathfrak{a}^{n+1} : x}{\mathfrak{a}^{n-1}}\right) + \ell\left(\frac{\mathfrak{a}^{n-1}}{\mathfrak{a}^n}\right)$$

serait un polynôme de degré $d-1$ puisque $\ell\left(\dfrac{\mathfrak{a}^{n-1}}{\mathfrak{a}^n}\right)$ est un polynôme de degré $d-1$, pour n assez grand.

3) De plus, en appliquant le lemme d'Artin-Rees à $(0 : x)$, on en déduit qu'il existe $k > 0$ tel que $(0 : x)\cap\mathfrak{a}^{n-1} = [(0 : x)\cap\mathfrak{a}^k]\mathfrak{a}^{n-k-1}$, d'où

$$\ell\left(\frac{0 : x}{(0 : x)\cap\mathfrak{a}^{n-1}}\right) = \ell\left(\frac{0 : x}{(0 : x)\cap\mathfrak{a}^k}\right) + \ell\left(\frac{(0 : x)\cap\mathfrak{a}^k}{[(0 : x)\cap\mathfrak{a}^k]\mathfrak{a}^{n-k-1}}\right).$$

Comme $\dfrac{0 : x}{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^{n-1}}$ est isomorphe à $\dfrac{(0 : x) + \mathfrak{a}^{n-1}}{\mathfrak{a}^{n-1}}$, qui est lui-même clairement inclus dans $\mathfrak{a}^n : x/\mathfrak{a}^{n-1}$, on a :

$$\ell\left(\frac{0 : x}{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^{n-1}}\right) \leq \ell\left(\frac{\mathfrak{a}^n : x}{\mathfrak{a}^{n-1}}\right)$$

et par conséquent $\ell\left(\dfrac{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^k}{[(0 : x) \cap \mathfrak{a}^k]\mathfrak{a}^{n-k-1}}\right)$ est un polynôme en n de degré inférieur ou égal à $d-2$, ce qui signifie que la dimension de $(0 : x) \cap \mathfrak{a}^k$ est inférieure ou égale à $d-2$ et a fortiori que la dimension de $(0 : x)$ est inférieure ou égale à $d-2$.

C.Q.F.D

Remark 2.2.7 *Dans la formule (2.1), on s'aperçoit que nécessairement si $x \in \mathfrak{a}$ est un paramètre de A, alors $e_{\mathfrak{a}}(A/x) \geq e_{\mathfrak{a}}(A)$. D'autre part, si x n'est pas paramètre de A, alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/x)$ si et seulement si* $\dim(xA) < \dim A$.

Lemma 2.2.8 *Si x est un élément de A et $\overline{x}$ sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A)$, alors* $\dim(0 : x) \leq \dim(0 : \overline{x})$.

Démonstration : Si $\overline{x}$ est régulier dans $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, alors $\mathfrak{a}^n : x = \mathfrak{a}^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, d'où, a fortiori, $O : x \subset \mathfrak{a}^n$ pour tout n, et par conséquent $0 : x = 0$ et x est régulier. Donc, si $\dim(0 : x) = 0$, alors $\dim(0 : \overline{x}) \geq 0$ et le lemme est vérifié.

On pourra donc supposer $\dim(0 : x) \geq 1$.

Soit alors $s = \dim(0 : \overline{x})$, cela signifie que, pour n assez grand, la longueur de $(0 : \overline{x})_n$ est un polynôme de degré $s-1$. Mais

$$\frac{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^n + \mathfrak{a}^{n+1}}{\mathfrak{a}^{n+1}} \subseteq (0 : \overline{x})_n \tag{2.2}$$

et

$$\frac{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^n + \mathfrak{a}^{n+1}}{\mathfrak{a}^{n+1}} \cong \frac{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^n}{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^{n+1}}. \tag{2.3}$$

et d'après le lemme d'Artin-Rees, il existe $k > 0$ tel que

$$(0 : x) \cap \mathfrak{a}^n = [(0 : x) \cap \mathfrak{a}^k]\mathfrak{a}^{n-k}.$$

D'autre part, de la suite exacte :

$$0 \to (0 : x) \cap \mathfrak{a}^k \to 0 : x \to \frac{0 : x}{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^k}$$

et de $\dim(0 : x/(0 : x) \cap \mathfrak{a}^k = 0$, on déduit que $\dim((0 : x) \cap \mathfrak{a}^k) = \dim(0 : x) = r$. Cela signifie que, pour n assez grand, la longueur du module $\dfrac{\mathfrak{a}^n[(0 : x) \cap \mathfrak{a}^k}{\mathfrak{a}^{n+1}[(0 : x) \cap \mathfrak{a}^k}$, qui n'est autre que le module $\dfrac{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^{n+k}}{(0 : x) \cap \mathfrak{a}^{n+k+1}}$, est un polynôme de degré égal à $r-1$. Ce qui, avec (2.2) et (2.3), implique que $r \leq s$.

C.Q.F.D

Remark 2.2.9 *Dans la démonstration ci-dessus, on remarque également que* $\dim(0 : x) = \dim(0 : \overline{x})$ *implique que* $e_{\mathfrak{a}}(0 : x) \leq e_{\tilde{\mathfrak{a}}}(0 : \overline{x})$ *où* $\tilde{\mathfrak{a}} = \sum_{n \geq 1} \mathfrak{a}^n / \mathfrak{a}^{n+1}$.

Proposition 2.2.10 *Si A est de dimension $d \geq 2$, alors, dans tout idéal de définition $\mathfrak{a}$ de A, il existe un paramètre x tel que $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/x)$.*

Démonstration : Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ l'ensemble des idéaux premiers associés à $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ tels que $\dim(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)/\mathfrak{p}_i) > d - 2$. Alors $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ n'est pas inclus dans leur réunion, par conséquent il existe un élément $\overline{x}$ de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ qui n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{p}_i$; son annulateur $0 : \overline{x}$ est alors tel que $\dim(0 : \overline{x}) \leq d - 2$.

Par conséquent, d'une part, $\overline{x}$ est paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ et, d'autre part, en vertu du lemme 2.2.8, $\dim(0 : x) \leq d - 2$, donc (proposition 2.2.6) $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/x)$.

C.Q.F.D

Corollary 2.2.11 *Si $\mathfrak{q} = (y_1, \ldots, y_d)$ est engendré par un système de paramètres, alors on peut trouver un système de générateurs $(x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathfrak{q}$ tel que :*

$$e_{\mathfrak{q}}(A) = e_{\mathfrak{q}}\left(\frac{A}{x_1}\right) = e_{\mathfrak{q}}\left(\frac{A}{(x_1, x_2)}\right) = \cdots = e_{\mathfrak{q}}\left(\frac{A}{(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1})}\right).$$

Démonstration : D'après la proposition 2.2.10, on peut trouver x_1 dans $\mathfrak{q}$ tel que $e_{\mathfrak{q}}(A) = e_{\mathfrak{q}}(A/x_1)$. Mais, en vertu de la proposition 2.2.6, cela signifie que $\overline{x}_1$ est paramètre de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{q}}(A)$ et, par conséquent, $x_1 \notin \mathfrak{m}\mathfrak{q}$. Or x_1 étant dans $\mathfrak{q}$ s'écrit : $x_1 = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_d y_d$.

L'un des α_i au moins ne peut être dans $\mathfrak{m}$, supposons que c'est α_1 par exemple, alors α_1 est inversible et $y_1 = \alpha_1^{-1} x_1 - \alpha_1^{-1} \alpha_2 y_2 - \cdots \alpha_1^{-1} \alpha_d y_d$, d'où $y_1 \in (x_1, y_2, \ldots, y_d)$, ce qui implique que $\mathfrak{q} = (x_1, y_2, \ldots, y_d)$.

De la même façon, par récurrence sur d, on construit $x_2, \ldots, x_{d-1}$ et on posera $x_d = y_d$.

C.Q.F.D

Proposition 2.2.12 *Si A est un anneau local de dimension d et $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A et si x, un paramètre de A, est dans $\mathfrak{a}^n$, alors $e_{\mathfrak{a}}(A/x) = n e_{\mathfrak{a}}(A)$ si et seulement si $\overline{x}$ est un paramètre de degré n de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ et si* $\dim(0 : x) \leq d - 2$.

Nous aurons besoin du lemme suivant pour démontrer cette proposition.

Lemma 2.2.13 *Il y a bijection entre les spectres gradués de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ et de $gr_{\mathfrak{a}^n}(A)$, pour tout entier $n \geq 1$.*

Démonstration : Il y a bijection entre les spectres gradués de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ et de $(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A))^n = \sum_{k \geq 0} \frac{\mathfrak{a}^{nk}}{\mathfrak{a}^{nk+1}}$.

D'autre part,

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^n}(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{\mathfrak{a}^{nk}}{\mathfrak{a}^{nk+n}}.$$

Il y a donc une surjection canonique π de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^n}(A)$ sur $(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A))^n$, à savoir :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\mathfrak{a}^{nk}}{\mathfrak{a}^{nk+n}} \xrightarrow{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{\mathfrak{a}^{nk}}{\mathfrak{a}^{nk+1}} \longrightarrow 0$$

dont le noyau est $\sum_{k\geq 0} \mathfrak{a}^{nk+1}/\mathfrak{a}^{nk+n}$. Ce noyau est un idéal nilpotent dans $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^n}(A)$, en effet : si $\overline{x} \in \mathfrak{a}^{nk+1}/\mathfrak{a}^{nk+n}$, alors $\overline{x}^n$ est l'image dans

$$\frac{\mathfrak{a}^{n^2k}}{\mathfrak{a}^{n^2k+n}}$$

de x^n/ Mais x^n est dans $\mathfrak{a}^{(nk+1)n} = \mathfrak{a}^{n^2k+n}$, donc $\overline{x}^n = 0$.

C.Q.F.D

Démonstration de la proposition 2.2.12 :

- Conditon suffisante : Soit $x \in A$ tel que $\overline{x}$ soit paramètre de degré n de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ et $\dim(0 : x) \leq d-2$. On déduit du lemme 2.2.13 que $\overline{x}$ est paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^n}(A)$, d'où d'après la proposition 2.2.6 que $e_{\mathfrak{a}^n}(A) = e_{\mathfrak{a}^n}(A/x)$, ce qui s'écrit aussi $e_{\mathfrak{a}}(A/x) = ne_{\mathfrak{a}}(A)$.

- Condition nécessaire : Soit $x \in \mathfrak{a}^n$ un paramètre de A tel que $e_{\mathfrak{a}}(A : x) = ne_{\mathfrak{a}}(A)$, alors $e_{\mathfrak{a}^n}(A : x) = n^{d-1}e_{\mathfrak{a}}(A : x) = n^{d-1}(ne_{\mathfrak{a}}(A)) = e_{\mathfrak{a}^n}(A)$. Par conséquent, en vertu de 2.2.6, $\dim(0 : x) \leq d-2$ et $\overline{x}$ est paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^n}(A)$, d'où on déduit, par le lemme 2.2.13, que $\overline{x}$ est paramètre de $\mathrm{gr}'_{\mathfrak{a}}A)$ de degré k avec $n \leq k < 2n$.

Mais, d'après la condition suffisante, si $\overline{x}$ est paramètre de degré k de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, alors $e_{\mathfrak{a}}(A/x) = ke_{\mathfrak{a}}(A)$, d'où $k = n$

C.Q.F.D

Corollary 2.2.14 *Soient $x_1, \ldots, x_s$ tels que $\overline{x}_i$ est un paramètre de degré n_i de $gr_{\mathfrak{a}}(A/x_1, \ldots, x_{i-1})$ et* $\dim \left[\dfrac{(x_1, \ldots, x_{i-1}) : x_i}{(x_1, \ldots, x_{i-1})}\right] \leq d-i-1$, *alors* $e_{\mathfrak{a}}(A/x_1, \ldots, x_s) = n_1 \cdots n_s \cdot e_{\mathfrak{a}}(A)$.

La démonstration de ce corollaire constitue une application immédiate de la proposition 2.2.12. La réciproque de ce corollaire n'est pas vraie généralement : en effet, si $e_{\mathfrak{a}}(A/x, y) = me_{\mathfrak{a}}(A)$, cela n'implique pas, en général, que $e_{\mathfrak{a}}(A/x)$ ou $e_{\mathfrak{a}}(A/y)$ soit un multiple de $e_{\mathfrak{a}}(A)$. Cependant, cette réciproque existe partiellement :

Corollary 2.2.15 *Si $(x_1, \ldots, x_s) \subset \mathfrak{a}$ se prolonge en un système de paramètres de A, alors $e_{\mathfrak{a}}(A/x_1, \ldots, x_s) = e_{\mathfrak{a}}(A)$ si et seulement si $\overline{x}_i$ est paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A/x_1, \ldots, x_{i-1})$ et* $\dim \left[\dfrac{(x_1, \ldots, x_{i-1}) : x_i}{(x_1, \ldots, x_{i-1})}\right] \leq d-i-1$.

Démonstration : La condition est suffisante en vertu du corollaire 2.2.14. La nécessité de la condition peut se démontrer par récurrence sur s en remarquant simplement que :

$$e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1, \ldots, x_s}\right) \geq e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1, \ldots, x_{s-1}}\right) \geq e_{\mathfrak{a}}(A),$$

d'où que

$$e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1, \ldots, x_s}\right) = e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1, \ldots, x_{s-1}}\right).$$

C.Q.F.D

On peut, de même que pour la notion d'idéal entier sur un autre, se poser la question suivante : étant donné un idéal de définition $\mathfrak{a}$, quels sont les idéaux maximaux contenant $\mathfrak{a}$ et ayant pour multiplicité $e_{\mathfrak{a}}(A)$ et quels sont les minimaux contenus dans $\mathfrak{a}$ et ayant également cette multiplicité $e_{\mathfrak{a}}(A)$?

Mais nous ne pouvons pas à ce stade répondre à cette question. Cependant, on peut déjà remarquer le fait suivant :

Proposition 2.2.16 *Si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont deux systèmes de paramètres de A tels que $\underline{x} \supset \underline{y}$ et $e_{\underline{x}}(A) = e_{\underline{y}}(A)$, alors $\underline{x} = \underline{y}$.*

Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemma 2.2.17 *$\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux de définition tels que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ et $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$, on a $\mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{m}\mathfrak{a}$.*

Démonstration : Supposons $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{m}$, alors évidemment $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}(A)$ (1). Or $\mathfrak{a}$ étant un idéal de définition, il existe $k > 0$ tel que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^k$, d'où $\mathfrak{m}^k\mathfrak{a}^k \subset \mathfrak{a}^{k+1}$, ce qui se traduit sur les multiplicités : $e_{\mathfrak{a}^{k+1}}(A) \leq e_{(\mathfrak{m}\mathfrak{a})^k}(A)$. D'où en explicitant les deux membres :

$$(k+1)^d e_{\mathfrak{a}}(A) \leq k^d e_{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}(A)$$

et d'après (1), cela signifie encore que $(k+1)^d \leq k^d$, ce qui est évidemment impossible.

C.Q.F.D

Démonstration de la proposition 2.2.16 : Procédons par récurrence sur $d = \dim A$.

1) $\dim A = 1$: dans ce cas, $\underline{x}$ est engendré par un élément x, de même que $\underline{y}$ est engendré par y. Mais $\underline{y} \subset \underline{x}$ implique que $y = \alpha x$ pour un certain élément α de A. Cependant, d'après le lemme 2.2.17, $\underline{y} \nsubseteq \mathfrak{m}\underline{x}$, par conséquent $\alpha \notin \mathfrak{m}$, d'où α est inversible et alors $x = \alpha^{-1}y$, ce qui signifie que $x \in \underline{y}$, donc que $\underline{x} = \underline{y}$.

2) $\dim A = d \geq 2$. Dans ce cas, il existe, d'après 2.2.10, un élément z dans $\underline{y}$ tel que $e_{\underline{y}}(A) = e_{\underline{y}}(A/z)$. Mais alors $e_{sousx}(A/z) = e_{\underline{y}}(A/z)$ puisque $e_{\underline{x}}(A) = e_{\underline{y}}(A) = e_{\underline{y}}(A/z) \geq e_{\underline{x}}(A/z) \geq e_{\underline{x}}(A)$. Comme, par construction de z, $\overline{z}$ est paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\underline{y}}(A)$ (proposition 2.2.10), $z \notin \mathfrak{m}\underline{y}$, et a fortiori aussi $z \notin \mathfrak{m}\underline{x}$; par conséquent $\underline{x}$ et $\underline{y}$ peuvent être engendrés chacun par un système de paramètres contenant z, et alors $\underline{x}/z$ et $\underline{y}/z$ peuvent être engendrés par des systèmes de paramètres de A/z et ils ont mêmes multiplicités. D'où, par hypothèse de récurrence, $\underline{x}/z = \underline{y}/z$, d'où $\underline{x} = \underline{y}$.

C.Q.F.D

2.3 Liaison entre les deux notions

2.3.1 Entier implique même multiplicité

Proposition 2.3.1 *Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de définition de A tels que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$.*

Démonstration : Si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, il existe $k > 0$ tel que $\mathfrak{a}^{k+n} = \mathfrak{b}^n \mathfrak{a}^k$ pour tout $n > 0$, mais cela signifie aussi que $\mathfrak{a}^{k'+n} = \mathfrak{b}^n \mathfrak{a}^{k'}$ pour tout $k' \geq k$ et tout $n \geq 0$.

Par ailleurs, $\mathfrak{b}$ étant un idéal de définition, il existe $\lambda > 0$ tel que $\mathfrak{a}^\lambda \subset \mathfrak{b}$.

Soit $k' = \sup(k; \lambda)$, alors $\mathfrak{a}^{k(+n} = \mathfrak{b}^n \mathfrak{a}^{k'} \subset \mathfrak{b}^{n+1} \subset \mathfrak{a}^{n+1}$. Par conséquent, on a la double inégalité suivante :

$$e_{\mathfrak{a}^{k'+n}}(A) \geq e_{\mathfrak{b}^{n+1}}(A) \geq e_{\mathfrak{a}^{n+1}}(A) \text{ pour tout } n > 0$$

autrement dit :

$$(n+k')^d e_{\mathfrak{a}}(A) \geq (n+1)^d e_{\mathfrak{b}}(A) \geq (n+1)^d e_{\mathfrak{a}}(A) \text{ pour tout } n > 0,$$

ou encore :

$$1 \leq \frac{e_{\mathfrak{b}}(A)}{e_{\mathfrak{a}}(A)} \leq \frac{(n+k')^d}{(n+1)^d} \text{ pour tout } n > 0.$$

Mais, lorsque n tend vers l'infini, le rapport $(n+k')^d/(n+1)^d$ tend vers 1, par conséquent, $e_{\mathfrak{b}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A)$.

C.Q.F.D

Proposition 2.3.2 *Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A, alors il existe un idéal $\mathfrak{q}$ contenu dans $\mathfrak{a}$ engendré par un système de paramètres tel que $e_{\mathfrak{q}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A)$.*

Démonstration : cela résulte immédiatement de 2.1.19, de 2.1.20 et de 2.3.1.

Remark 2.3.3 *Il est même possible de trouver un système de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathfrak{q}$ tel que :*

$$e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1}\right) = e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1, x_2}\right) = \cdots = e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}}\right).$$

En effet, en vertu du corollaire 2.2.11, on peut trouver $(x_1, \ldots, x_d)$ tel que $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)$ et $e_{\mathfrak{q}}(A) = e_{\mathfrak{q}}(A/x_1) = \cdots = e_{\mathfrak{q}}(A/x_1, \ldots, x_{d-1})$.

Comme on a choisi $\mathfrak{q}$ tel que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{q}$, on a aussi que $\dfrac{\mathfrak{a}}{x_1, \ldots, x_i}$ est entier sur $\dfrac{\mathfrak{q}}{x_1, \ldots, x_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, d$ et, par conséquent, en vertu du 2.3.1,

$$e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1}\right) = e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1, x_2}\right) = \cdots = e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}}\right).$$

2.3.2 Même multiplicité implique-t-il entier ?

La question qui vient immédiatement à l'esprit est de savoir si la proposition 2.3.1 admet une réciproque. Nous résoudrons ce problème au chapitre suivant. Remarquons toutefois qu'en vertu des propositions 2.1.8 et 2.2.5, une telle réciproque ne devrait pouvoir être vraie que pour un anneau équidimensionnel : en effet, 2.1.8 dit que la propriété pour $\mathfrak{a}$ d'être entier sur $\mathfrak{b}$ se teste sur **tous** les idéaux premiers minimaux de A, tandis que celle d'avoir même multiplicité se teste sur les seuls idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}$ tels que $\dim(A/\mathfrak{p}) = d$. Plus précisément :

Proposition 2.3.4 *Soit A un anneau local. Si pour tout couple d'idéaux de définition $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$ implique $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$, alors A est équidimensionnel.*

On aura besoin du lemme suivant :

Lemma 2.3.5 *Soit A un anneau local, $\mathfrak{a}$ un idéal de définition et z un élément de A. Alors si z est entier sur $\mathfrak{a}^n$ pour tout $n \geq 1$, z est nilpotent.*

Démonstration : Il suffit clairement de montrer que $z = 0$ dans le cas où A est intègre.

On sait que, dans ce cas, il existe un anneau de valuation discrète A', dominant A. L'idéal $\mathfrak{a}A'$ est alors un idéal de définition de A', anneau dans lequel tout idéal de définition est intégralement clos.

Comme $\mathfrak{a}^n A' = (\mathfrak{a}A')^n$ et que de z entier sur $\mathfrak{a}^n$ pour tout n on déduit que z est entier sur $\mathfrak{a}^n A'$, donc sur $(\mathfrak{a}A')^n$ pour tout n, cela implique que $z \in (\mathfrak{a}A')^n$, autrement dit $z = 0$.

C.Q.F.D

Démonstration de la proposition 2.3.4 : Soit z un élément de l'intersection des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}$ tels que $\dim(A/\mathfrak{p}) = d$. Cela signifie que $e_{\mathfrak{a}+zA}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p}$ et tout idéal de définition $\mathfrak{a}'$ de A, et, par conséquent, en vertu de 2.2.5, $e_{\mathfrak{a}+zA}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A)$ pour tout idéal de définition $\mathfrak{a}$. D'où, d'après les hypothèses de la proposition 2.3.4, l'idéal $\mathfrak{a} + zA$ est entier sur $\mathfrak{a}$ pour tout idéal de définition $\mathfrak{a}$.

Et, d'après le lemme 2.3.5, cela implique que z est nilpotent, autrement dit que z appartient à tous les idéaux premiers minimaux de A. Conclusion : pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$, $\dim(A/\mathfrak{p}) = d$.

C.Q.F.D

2.3.3 Cas de la dimension 1

Remarquons enfin que , dans la cas où la dimension de A est 1 (dans ce cas, A est évidemment équidimensionnel), cette réciproque est évidente :

En utilisant les propositions 2.1.8 et 2.2.5, on se ramène facilement au cas où A est intègre.

Soit alors x un élément de $\mathfrak{b}$ tel que $\overline{x}$ soit paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{b}}(A)$, alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A/x) \geq e_{\mathfrak{a}}(A/x) \geq e_{\mathfrak{a}}(A)$ et par conséquent $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/x)$, d'où, en vertu de 2.2.6, $\overline{x}$ est paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, ce qui signifie encore, d'après la proposition 2.1.18, que $\mathfrak{a}$ est entier sur (x), d'où a fortiori que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

Chapitre 3

Le théorème de Rees

Dans le paragraphe 3 du chapitre précédent nous avons esquissé une étude des relations entre les notions de multiplicité et de dépendance intégrale sur un idéal. Nous nous proposons de montrer ici que, sous certaines conditions générales sur l'anneau A, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de définition tels que $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$ si et seulement si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$. Ce théorème a été énoncé et démontré par D. Rees pour les anneaux de complété équidimensionnel [1] ; l'outil essentiel de la démonstration est le polynôme de Battacharya généralisant le polynôme de Hilbert-Samuel : $P(m, b) = \ell\left(\dfrac{A}{\mathfrak{a}^n\mathfrak{b}^m}\right)$. De plus, il nous a été communiqué une démonstration de B. Tessier (non publiée). Ce dernier utilise dans le cas A intègre, le normalisé X de l'éclaté de l'idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ et compare les degrés des diviseurs de X engendrés par $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$.

Nous donnerons ici une nouvelle démonstration de ce théorème dans le cas où A est équidimensionnel, universellement caténaire et universellement japonais. Cette démonstration se fera par récurrence sur la dimension de A en utilisant certaines propriétés énoncées dans le chapitre 1. Le cas où $\dim A = 1$ ayant été traité au chapitre 2 ; paragraphe 2.3.3.

De plus, nous démontrerons un théorème équivalent au théorème de Rees qui permet de relier les anneaux gradués $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)/\bar{x}$ et $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A/x)$ dans le cas où $\bar{x}$ est un paramètre de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$.

Commençons par énoncer ces deux théorèmes :

Théorème 3.0.1 *(Rees) Si A est un anneau local, équidimensionnel, universellement caténaire et universellement japonais et si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de définition de A tels que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, alors $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$ si et seulement si $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.*

Théorème 3.0.2 *Si A est un anneau local, équidimensionnel, universellement caténaire et universellement japonais et si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A et x un élément de A tel que sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est un paramètre, alors le noyau de la surjection canonique*

$$\frac{gr_{\mathfrak{a}}(A)}{\bar{x}} \longrightarrow gr_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x}\right) \longrightarrow 0$$

est nilpotent.

La démonstration de ces deux théorèmes se fera suivant le plan ci-après :

1. On démontre le théorème 3.0.2 dans le cas où A est intègre et intégralement clos et où l'idéal $\mathfrak{a}$ et toutes ses puissances sont intégralement clos.

2. On démontre le théorème de Rees.

3. On démontre que le théorème de Rees implique le théorème 3.0.2 en toute généralité.

3.1 Le théorème 3.0.2 dans un cas particulier

Supposons A est intègre et intégralement clos et $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de A tel que $\mathfrak{a}^n$ est intégralement clos pour tout $n \geq 1$, alors le théorème 3.0.2 est vrai.

Lemma 3.1.1 *Soit $S = \sum \mathfrak{a}^n = A[a_A T, \ldots, a_n T]$ l'algèbre de Rees de $\mathfrak{a} = a_1 A + \cdots + a_n A$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier gradué relevant de S, alors*

$$(gr_{\mathfrak{a}}(A))_{\mathfrak{p}} = \frac{S_{\mathfrak{p}}}{T^{-1} S_{\mathfrak{p}}}.$$

Démonstration : $\mathfrak{p}$ est aussi un idéal premier gradué relevant de S. Comme $\mathfrak{p}$ est relevant, il existe un i tel que $a_i T \notin \mathfrak{p}$; alors $a_i T$ est inversible dans $S_{\mathfrak{p}}$, par conséquent T^{-1} est un élément de $S_{\mathfrak{p}}$.

D'autre part, $(a_1 T, \ldots, a_n T) S_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}$, par conséquent, en multipliant les deux membres par T^{-1}, on obtient $(a_1, \ldots, a_n) S_{\mathfrak{p}} = T^{-1} S_{\mathfrak{p}}$.

Or précisément $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A) = S/\mathfrak{a}S$, ce qui se traduit en localisant en $\mathfrak{p}$ par :

$$(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A))_{\mathfrak{p}} = \frac{S_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{a} S_{\mathfrak{p}}} = \frac{S_{\mathfrak{p}}}{T^{-1} S_{\mathfrak{p}}}.$$

C.Q.F.D

Lemma 3.1.2 *Si A est intègre et universellement caténaire, alors $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est équidimensionnel.*

Démonstration : Il suffit évidemment de montrer que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ localisé en l'idéal maximal irrelevant M est équidimensionnel et on peut supposer $d = \dim A \geq 1$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal gradué relevant de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, alors $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal gradué relevant de S.

A étant intègre et universellement caténaire, S est intègre et caténaire et par conséquent tous les localisés en des idéaux gradués maximaux relevants de S sont caténaires de dimension d. Donc $S_{\mathfrak{p}}$ est caténaire de dimension d.

Mais, en vertu de 3.1.1, $(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A))_{\mathfrak{p}} = \frac{S_{\mathfrak{p}}}{T^{-1} S_{\mathfrak{p}}}$ et l'anneau $\frac{S_{\mathfrak{p}}}{T^{-1} S_{\mathfrak{p}}}$ est équidimensionnel de dimension $d-1$, d'où $(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A))_M$ est équidimensionnel de dimension d.

C.Q.F.D

Démontrons à présent le théorème 3.0.2 lorsque A est intègre et intégralement clos et $\mathfrak{a}$ un idéal de définition dont toutes les puissances sont intégralement closes ($\mathfrak{a} = a_1 A + \cdots + a_n A$).

Pour commencer, montrons que l'algèbre de Rees $S = \sum \mathfrak{a}^n = A[a_1 T, \ldots, a_n T]$ est intégralement close dans son corps des fractions K.

Lemma 3.1.3 *Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition et si $\overline{\mathfrak{a}^n}$ est la clôture intégrale de $\mathfrak{a}^n$ (pour tout $n > 0$) et S la clôture intégrale de $S = \sum \mathfrak{a}^n$, alors $\overline{S} = \sum \overline{\mathfrak{a}^n}$.*

Démonstration : Il est clair que $\sum \overline{\mathfrak{a}^n}$ est entier sur $\sum \mathfrak{a}^n$. Il faut donc montrer que $\overline{S} \subset \sum \overline{\mathfrak{a}^n}$. Pour cela, il suffit de montrer que tout élément homogène de $\overline{S}$ est dans $\sum \overline{\mathfrak{a}^n}$.

Mais A étant intégralement clos, l'anneau de polynômes $A[T]$ est intégralement clos, donc $\overline{S} \subset A[T]$.

Soit donc z un élément homogène de degré k de $A[T]$, z s'écrit alors αT^k avec $\alpha \in A$. Ecrivons que z satisfait à une équation de dépendance intégrale homogène sur S :

$$z^q + \alpha_1 z^{q-1} + \cdots + \alpha_i z^{q-i} + \cdots + \alpha_q = 0 \tag{3.1}$$

les α_i étant des éléments homogènes de degré ik de S, autrement dit $\alpha_i = \beta_i T^{ik}$ avec $\beta_i \in \mathfrak{a}^{ik}$.

Par conséquent, (3.1) s'écrit encore sous la forme :

$$\alpha^q T^{qk} + \beta_1 T^k \alpha^{q-1} T^{k(q-1)} + \cdots + \beta_i T^{ik} \alpha^{q-i} T^{k(q-i)} + \cdots + \beta_q T^{qk} = 0 \tag{3.2}$$

ou encore, en simplifiant par T^{qk}, (**??**) devient une relation dans A :

$$\alpha^q + \beta_1 \alpha^{q-1} + \cdots + \beta_i \alpha^{q-i} + \cdots + \beta_q = 0. \tag{3.3}$$

Et (3.3) est une équation de dépendance intégrale de α sur $\mathfrak{a}^k$, donc α est dans $\mathfrak{a}^k$ et par conséquent $z = \alpha T^k$ est dans $\sum \overline{\mathfrak{a}^n}$.

C.Q.F.D

Conclusion : Si $\mathfrak{a}^n = \overline{\mathfrak{a}^n}$ pour tout $n \geq 1$, l'agèbre de Rees $S = \sum \mathfrak{a}^n$ est intégralement close, d'où d'après le critère de Normalité de Serre ([4], théorème 39, page 125), S vérifie la condition (S_2)) de Serre ([4], page 125).

Comme pour tout idéal premier relevant $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, on a $(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A))_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}/T^{-1}S_{\mathfrak{p}}$ (lemme 3.1.1), on en déduit que pour un tel idéal premier, $(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A))_{\mathfrak{p}}$ vérifie la condition (S_1)) de Serre.

Les idéaux premiers associés d'un anneau gradué étant gradués, les seuls idéaux premiers pouvant être associés à $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ sont les minimaux et éventuellement l'idéal maximal irrelevant M.

Soit maintenant $\overline{x}$ un paramètre de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$/ Puisque pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq M$, $\overline{x}$ n'est contenu dans aucun idéal premier associé à $(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A))_{\mathfrak{p}}$, l'annulateur $0 : \overline{x}$ de $\overline{x}$ est soit nul, soit à support réduit à M.

Notons

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \sum_{n \geq 1} \mathfrak{a}^n / \mathfrak{a}^{n+1}.$$

Alors on a évidemment :

$$e_{\tilde{\mathfrak{a}}}\left(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)\right) = e_{\mathfrak{a}}(A) \text{ et } e_{\tilde{\mathfrak{a}}}\left(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\frac{A}{x})\right) = e_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x}\right).$$

Le théorème étant évident lorsque $d = \dim A = 1$, on peut supposer $d \geq 2$. Dans ce cas, comme $\dim(0 : \overline{x}) \leq d-2$, si n est le degré de $\overline{x}$, on a en vertu de la proposition 2.2.12,

$$e_{\tilde{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)}{\overline{x}}\right) = ne_{\tilde{\mathfrak{a}}}\left(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)\right) = ne_{\mathfrak{a}}(A).$$

D'après 2.2.12 aussi, on a

$$e_{\mathfrak{a}}(A/x) = ne_{\mathfrak{a}}(A), \text{ donc } e_{\tilde{\mathfrak{a}}}\left(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A/x)\right) = ne_{\mathfrak{a}}(A).$$

Considérons la surjection naturelle de modules gradués sur $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$:

$$\frac{\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)}{\overline{x}} \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x}\right) \longrightarrow 0.$$

Ces deux modules de dimension $d-1$ ayant la même multiplicité pour l'idéal $\tilde{\mathfrak{a}}$; on en déduit par le théorème de Samuel (2.2.2) que le noyau de cette application est de dimension inférieure ou égale à $d-2$. Comme $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ est caténaire et équidimensionnel, il en est de même de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)/\overline{x}$, par conséquent un idéal de dimension strictement inférieure à $\dim\left(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)/\overline{x}\right) = d-1$ est nilpotent.

Remark 3.1.4 *utilisant la proposition 2.2.4, on peut non seulement montrer dans ce cas particulier que $gr_{\mathfrak{a}}(A)/\overline{x}$ et $gr_{\mathfrak{a}}(A/x)$ ont même ensemble d'idéaux premiers minimaux, mais que pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$, on a :*

$$\ell\left(\left(\frac{gr_{\mathfrak{a}}(A)}{\overline{x}}\right)_{\mathfrak{p}}\right) = \ell\left(\left(gr_{\mathfrak{a}}(\frac{A}{x})\right)_{\mathfrak{p}}\right).$$

3.2 Preuve du théorème de Rees

Démontrons à présent le théorème de Rees. D'après les corollaires 2.1.10 et 2.2.3, on peut clairement supposer A intégralement clos. On supposera donc A intègre, intégralement clos, universellement caténaire et universellement japonais.

Lemma 3.2.1 *Etant donné un idéal de définition $\mathfrak{a}$, il existe un entier positif k tel que $(\overline{\mathfrak{a}^k})^n = \overline{\mathfrak{a}^{kn}}$ pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration : D'après le lemme 3.1.3, il existe $k > 0$ tel que $\overline{\mathfrak{a}^{k+1}} = \mathfrak{a} \cdot \overline{\mathfrak{a}^k}$, d'où a fortiori $\overline{\mathfrak{a}^{k+1}} = \overline{\mathfrak{a}} \cdot \overline{\mathfrak{a}^k}$, ce qui implique $\overline{\mathfrak{a}^{kn}} = \overline{\mathfrak{a}^k}^n$.

C.Q.F.D

Soit maintenant $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de définition, $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, tels que $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$. Soit k tel que $\overline{\mathfrak{a}^k}^n = \overline{\mathfrak{a}^{kn}}$ pour tout $n \geq 1$. Alors $\mathfrak{a}^k \supseteq \mathfrak{b}^k$ et $e_{\mathfrak{a}^k}(A) = e_{\mathfrak{b}^k}(A)$. Mais $\overline{\mathfrak{a}^k}$ est entier sur $\mathfrak{a}^k$, donc $e_{\overline{\mathfrak{a}^k}}(A) = e_{\mathfrak{a}^k}(A) = e_{\mathfrak{b}^k}(A)$.

Si maintenant on démontre que $\overline{\mathfrak{a}^k}$ est entier sur $\mathfrak{b}^k$, on aura démontré a fortiori que $\mathfrak{a}^k$ est entier sur $\mathfrak{b}^k$ et donc (proposition 2.1.4) que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$. On peut donc clairement se ramener au cas où A est intégralement clos et $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}^n = \overline{\mathfrak{a}^n}$ pour tout $n \geq 1$.

Dans ce cas, soit $x \in \mathfrak{b}$ tel que $\overline{x}$ soit paramètre de degré A de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{b}}(A)$, alors

$$e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A/x) \geq e_{\mathfrak{a}}(A/x) \geq e_{\mathfrak{a}}(A),$$

d'où $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/x)$ et par conséquent $\overline{x}$ est un paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$.

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathfrak{a}/x$ est entier sur $\mathfrak{b}/x$, donc on peut trouver des éléments $x_1, \ldots, x_{d-1}$ de $\mathfrak{b}$ tels que $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{d-1}$ forment un système de paramètres de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A/x)$, mais d'après le théorème 3.0.2 (qu'on a démontré dans le cas où nous sommes), celui-ci se relève en un système de paramètres $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{d-1})$ de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)/\overline{x}$; par conséquent, $(\overline{x}, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{d-1})$ est un système de paramètres de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, ce qui signifie (proposition 2.1.18) que $\mathfrak{a}$ est entier sur $(x, x_1, \ldots, x_{d-1})$, d'où a fortiori que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{b}$.

Remark 3.2.2 *On a aussi montré ainsi que 3.0.2 implique 3.0.1.*

3.3 Implication en toute généralité

Montrons à présent que le théorème de Rees implique le théorème 3.0.2 en toute généralité.

Proposition 3.3.1 *Soit A un anneau local équidimensionnel universellement japonais et universellement caténaire. Si x est un élément régulier de A tel que $\overline{x}$ est un paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$, alors, pour tout y de A tel que sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A/x)$ est un paramètre de degré 1 de $gr_{\mathfrak{a}}(A/x)$, sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ se prolonge avec $\overline{x}$ en un système de paramètres de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$.*

Démonstration : Comme $\overline{x}$ est paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ et que x est régulier, on déduit de la proposition 2.2.6 que $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{a}}(A/x)$.

Si maintenant $\overline{y}$ est un paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{A}}(A)$, c'est qu'il existe des éléments $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{d-2}$ de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{A}}(A/x)$, homogènes de degré 1 , tels que $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{d-2}, \overline{y})$ forme un système de paramètres de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A/x)$. On en déduit, d'après la proposition 2.1.18, que $\mathfrak{a}/x$ est entier sur l'idéal $(x_1; \ldots, x_{d-2}, y)$ de A/x, d'où que $e_{\mathfrak{a}}(A/x) = e_{(x_1,\ldots,x_{d-2},y)}(A : x)$.

Soit $[q$ l'idéal $(x_1, \ldots, x_{d-2}, y, x) \subseteq \mathfrak{a}$. On a

$$e_{\mathfrak{a}}(A) \leq e_{\mathfrak{q}}(A) \leq e_{\mathfrak{q}}(A/x) = e_{\mathfrak{a}}(A/x) = e_{\mathfrak{a}}(A)$$

et par conséquent $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{q}}(A)$.

On déduit alors du théorème de Rees que $\mathfrak{a}$ est entier sur $\mathfrak{q}$ et par conséquent, d'après la proposition 2.1.18, que $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{d-2}, \overline{y}, \overline{x})$ forme un système homogène de paramètres de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$.

C.Q.F.D

Corollary 3.3.2 *Dans les mêmes conditions, et si $\overline{x}$ est paramètre de degré n de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$, alors pour tout y de A tel que sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A/x)$ est un paramètre de degré m de $gr_{\mathfrak{a}}(A/x)$, sa forme dominante dans $gr_{\mathfrak{a}}(A)$ est de degré n et se prolonge avec $\overline{x}$ en un système de paramètres de $gr_{\mathfrak{a}}(A)$.*

La démonstration de ce corollaire repose sur le lemme 2.2.13 et le lemme immédiat suivant :

Lemma 3.3.3 *Si π est une surjection d'anneaux de A dans B de noyau nilpotent, alors la surjection cannonique*

$$gr_{\mathfrak{a}}(A) \to gr_{\pi(\mathfrak{a}}(B)$$

est de noyau nilpotent.

Démonstration du corollaire 3.3.2 : Soit donc $\overline{x}$ paramètre de degré n de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, on en déduit que $\overline{x}^m = \overline{x^m}$ est paramètre de degré nm de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ et donc, d'après le lemme 2.2.13, $\overline{x^m}$ est paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^{nm}}(A)$.

De même, $\overline{y}$ est paramètre de degré m de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A/x)$ et, par conséquent, d'après le lemme 3.3.3, paramètre de degré m de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A/x^m)$ et donc $\overline{y}^n = \overline{y^n}$ est paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^{nm}}(A)$.

On se retrouve donc ramené zux conditions de la proposition 3.3.1 en ce qui concerne $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^{nm}}(A)/((\overline{x}^m)$ et $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^{nm}}(A/x^m)$.

On en déduit donc que $\overline{y}^n$ est un paramètre de degré 1 de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}^{nm}}(A)/((\overline{x}^m)$, d'où, toujours d'après le lemme 2.2.13, que $\overline{y^n}$ est un paramètre de degré nm de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)/(\overline{x^m}) = \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)/(\overline{x}^m)$ et par conséquent $\overline{y}$ est paramètre de degré m de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)/(\overline{x})$.

C.Q.F.D

Démonstration du théorème 3.0.2 : Soit maintenant A_{red} l'anneau réduit de A. Si x est un paramètre de A tel que $\overline{x}$ soit paramètre de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$, alors x est régulier dans A_{red} et $\overline{x}$ est paramètre de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A_{red}$ d'après le lemme 3.3.3.

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\frac{\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A_{red})}{(\overline{x})} \arrow[r] & \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A_{red}}{x}\right) \arrow[r] & 0 \\
\frac{\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)}{(\overline{x})} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}\left(\frac{A}{x}\right) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel, en vertu du lemme 3.3.3, les deux flèches verticales sont à noyau nilpotent et, en vertu du corollaire 3.3.2, la flèche horizontale du haut est aussi à noyau nilpotent. Par conséquent, la flèche horizontale du bas est à noyau nilpotent.

C.Q.F.D

Remark 3.3.4 *Nous aurions voulu déterminer si les conditions "A universellement caténaire" et "A universellement japonais" sont réellement nécessaires. Nous n'avons pas pu pleinement répondre à cette question ; cependant, il semble que, dans sa démonstration, Rees n'utilise en fait que "A universellement caténaire".*

Remark 3.3.5 *Un des intérêts du théorème de Ress est de pouvoir "passer à la limite". Exemple : soient* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *deux idéaux de définition* $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ *tels que* $\mathfrak{b}^n \supset \mathfrak{m}\mathfrak{a}^n$ *pour tout* n *; il est difficile, a priori, de montrer que* $\mathfrak{a}$ *est entier sur* $\mathfrak{b}$*, par contre il est très naturel, en passant à la limite sur* n*, de montrer que* $e_{\mathfrak{a}}(A) = e_{\mathfrak{b}}(A)$*, donc que* $\mathfrak{a}$ *est entier sur* $\mathfrak{b}$*.*

Chapitre 4

Propriété topologique du gradué associé d'un anneau (S_r)

Dans ce chapitre, nous allons essentiellement donner une application du théorème de Rees sous sa forme 3.0.2.

Definition 4.0.1 *On dira qu'un anneau local $\mathcal{R}$ d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est* 0*-connexe si l'ouvert pour la topologie de Zariski $\mathcal{U} = Spec\mathcal{R} \setminus \{\mathfrak{m}\}$.*

Lemma 4.0.2 *$\mathcal{R}$ n'est pas* 0*-connexe si et seulement si il existe deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{R}$ tels que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ soit nilpotent et $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ soit $\mathfrak{m}$-primaire.*

Démonstration : - Condition suffisante : Soit N le nilradical de $\mathcal{R}$; par hypothèse, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset N$, d'où $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \supset V(N) = \mathrm{Spec}\mathcal{R}$. D'autre part, $V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b})$ et, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ étant $\mathfrak{m}$-primaire, on a que $V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{m}\}$.

On a donc trouvé deux fermés de $\mathcal{U}$, à savoir $V(\mathfrak{a}) \cap \mathcal{U}$ et $V(\mathfrak{b}) \cap \mathcal{U}$, tels que leur intersection soit vide et leur réunion soit $\mathcal{U}$, donc $\mathcal{U}$ n'est pas connexe.

-Condition nécessaire : Si $\mathcal{U}$ n'est pas connexe, il existe deux fermés $V(\mathfrak{a})$ et $V(\mathfrak{b})$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) & & \{\mathfrak{m}\} \\ V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) & = & \mathrm{Spec}\mathcal{R} \end{array} \right. .$$

Or $V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{m}\}$, d'où $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est $\mathfrak{m}$-primaire et $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathrm{Spec}\mathcal{R}$, d'où $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est nilpotent.

C.Q.F.D

Remark 4.0.3 *On peut supposer dans le lemme ci-dessus que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$.*

En effet : soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ tels que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ soit nilpotent et $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ soit $\mathfrak{m}$-primaire.

Soient $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ les éléments d'une décomposition primaire de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_t$ les éléments d'une décomposition primaire de $\mathfrak{b}$ où les $\mathfrak{q}_j$ sont $\mathfrak{p}_j$-primaires, alors :

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s \cap \mathfrak{q}_{s+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t \subseteq \sqrt{(0)}.$$

(Si l'un des $\mathfrak{q}_i$ devait se retrouver plusieurs fois dans cette intersection, on ne l'écrirait qu'une seule fois, de façon à obtenir une décomposition irredondante de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$).

Soient $\mathfrak{q}'_1, \dots, \mathfrak{q}'_t$ les éléments d'une décomposition primaire de (0), alors les $\mathfrak{q}'_i$ sont $\mathfrak{p}_i$-primaires.

Soient $\mathfrak{a}' = \mathfrak{q}'_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}'_s$ et $\mathfrak{b}' = \mathfrak{q}'_{s+1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}'_t$, alors $\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}' = (0)$ et comme, pour tout i, il existe $\mu_i \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{q}'_i \supset \mathfrak{q}_i^{\mu_i}$, on en déduit que si $\mu = \sup(\mu_i)$, $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^\mu \subset \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$ et donc que $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$ est $\mathfrak{m}$-primaire.

Definition 4.0.4 *On dira qu'un anneau $\mathcal{R}$ est s-connexe, où $0 \leq s \leq \dim \mathcal{R} - 2$, si pour toute partie $x_1, \dots, x_s$ d'un système de paramètres de $\mathcal{R}$, Spec$(\mathcal{R}/x_1, \dots, x_s) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ est connexe.*

Propriétés immédiates :

1) Si $\mathcal{R}$ est s-connexe, alors $\mathcal{R}$ est i-connexe pour tout $i \leq s$.

2) Si $\mathcal{R}/x$ est s-connexe pour tout paramètre x de $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R}$ est $(s+1)$-connexe.

Démonstration : Pour montrer 1), il suffit de montrer que si x est un paramètre de $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R}/x$ 0-connexe implique $\mathcal{R}$ 0-connexe, ce qui en utilisant le lemme 4.0.2 est trivial. Démontrons-le par l'absurde :

Si $\mathcal{R}$ n'est pas 0-connexe, il existe $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ tels que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (0)$ et $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ soit $\mathfrak{m}$-primaire. Soient $\tilde{\mathfrak{a}}$ et $\tilde{\mathfrak{b}}$ les images de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ par la surjection naturelle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}/x$. Alors $\tilde{\mathfrak{a}} \cap \tilde{\mathfrak{b}} = (0)$ et $\tilde{\mathfrak{a}} + \tilde{\mathfrak{b}}$ est $\mathfrak{m}$-primaire, donc $\mathcal{R}/x$ n'est pas s-connexe.

La démonstration de (2) est évidente.

Proposition 4.0.5 *([5]) Soit $\mathcal{R}$ un anneau local ayant la propriété (S_r) de Serre, alors $\mathcal{R}$ est $(r-2$-connexe.*

Démonstration : Comme $\mathcal{R}$ est (S_r), $\mathcal{R}/x$ est $(S_{r-1)}$ pour tout paramètre x de $\mathcal{R}$; il suffit donc de montrer que si $\mathcal{R}$ est (S_2), alors $\mathcal{R}$ est 0-connexe.

Supposons donc que $\mathcal{R}$ vérifie la condition (S_2) de Serre et n'est pas 0-connexe. Cette dernière condition signifie qu'il existe deux ouverts $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ tels que, si $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}\mathcal{R} \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$.

Utilisons la cohomologie à support appliquée au point fermé $Y = \{\mathfrak{m}\}$. On a une suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(\mathrm{Spec}\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Spec}\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}})$$

$$\longrightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{R}}) \longrightarrow H^1_Y(\mathrm{Spec}\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}) \longrightarrow H^1(\mathrm{Spec}\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}) = 0$$

Or prof $\mathcal{R} \geq 2$ implique $H^1_Y(\mathrm{Spec}\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}) = 0$ et prof $\mathcal{R} \geq 1$ implique que $H^0_Y(\mathrm{Spec}\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}) = \Gamma_Y(\mathrm{Spec}\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}) = 0$. On en déduit donc l'isomorphisme :

$$0 \to \Gamma(\mathrm{Spec}\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}) \to \Gamma(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{R}}) \to 0.$$

Or sachant que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$, on en déduit que

$$\Gamma(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{R}}) = \Gamma(\mathcal{U}_1, \tilde{\mathcal{R}}) \oplus \Gamma(\mathcal{U}_2, \tilde{\mathcal{R}}).$$

Comme $\mathcal{R}$ est local, il ne peut être isomorphe à une somme directe de deux $\mathcal{R}$-modules.

C.Q.F.D

Definition 4.0.6 *On dira qu'un anneau gradué S est s-connexe, où $0 \leq s \leq \dim S - 2$, si pour toute partie $x_1, \ldots, x_s$ d'un système homogène de paramètres, Proj$(S/x_1, \ldots, x_s)$ est connexe.*

Théorème 4.0.7 *Soit $\mathcal{R}$ un anneau local de profondeur supérieure ou égale à 2 et $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de $\mathcal{R}$, alors $gr_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})$ est* 0*-connexe.*

Montrons que ceci est un cas particulier du théorème de connexion de Zariski ([2], 4.3.2) :

Théorème 4.0.8 *Soient Y un préschéma localement noethérien et $f : X \to Y$ un morphisme propre, alors si $f_*(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y$, les fibres $f^{-1}(y)$ de f sont connexes et non vides pour tout $y \in Y$.*

Appliquons ce théorème au cas de l'éclatement d'un idéal de définition $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ d'un anneau local $\mathcal{R}$, c'est-à-dire lorsque $X = \text{Proj}(\sum \mathfrak{a}^n$ et $Y = \text{Spec}\mathcal{R}$ et où f est le morphisme canonique : $X \to Y$. Comme $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition, pour montrer que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y$, il suffira de montrer que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{R}$.

Sous les hypothèses du théorème 4.0.7, on pourra supposer que les générateurs $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathfrak{a}$ sont tous réguliers, en effet :

Lemma 4.0.9 *Si prof$(\mathcal{R}) \geq 1$, un idéal de définition $\mathfrak{a}$ peut être engendré par ses éléments réguliers.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ tel que $\mathcal{R}$ soit engendré par les éléments réguliers de $\mathfrak{a}$. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers de Ass$(\mathcal{R})$, alors :

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \cup (\bigcup_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i).$$

Comme prof$(\mathcal{R}) \geq 1$, $\mathfrak{a}$ est un idéal fidèle et par conséquent $\mathfrak{a}$ n'est inclus dans aucun des $\mathfrak{p}_i$, d'où par évitement $\mathfrak{a}$ est inclus dans $\mathfrak{b}$, d'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

C.Q.F.D

Démonstration du théorème 4.0.7 :

Soit donc $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ où les a_i sont réguliers dans $\mathcal{R}$.

X étant obtenu par recollement des ouverts

$$\mathcal{U}_i = \text{Spec}(\mathcal{R}[\frac{a_i}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}]),$$

on en déduit que

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma(\mathcal{U}_i, \mathcal{O}_X)$$

dans l'anneau total des fractions de $\mathcal{R}$.

1) Montrons que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ s'injecte dans $\Gamma(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{R}})$ où $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}\mathcal{R} \setminus \{\mathfrak{m}\}$; pour tout i, $\mathcal{R}[\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}]$ est inclus dans $\mathcal{R}_{a_i}$ et par conséquent :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \bigcap \mathcal{R}[\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}] \subset \bigcap \mathcal{R}_{a_i}.$$

Or les a_i engendrant un idéal de définition de $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ est réunion des ouverts $D(a_i)$ et par conséquent $\Gamma(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{R}}) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{a_i}$.

2) On a vu au cours de la démonstration de 4.0.5 que, si $\mathrm{prof}(\mathcal{R}) \geq 2$, $\mathcal{R}$ est isomorphe à $\Gamma(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{R}})$.

De (1) et (2), on déduit que $\mathcal{R} \sim \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

On peut donc appliquer le théorème de connexion et en déduite que les fibres $f^{-1}(y)$ de f sont connexes pour tout $y \in Y = \mathrm{Spec}\mathcal{R}$.

En particulier, si $y = \{\mathfrak{m}\}$, la fibre $f^{-1}(\{\mathfrak{m}\})$ est connexe. Or, cette fibre est, par définition, $X \times_Y \mathrm{Spec}(\mathcal{R}/\mathfrak{m}\mathcal{R})$, c'est-à-dire que :

$$f^{-1}(\{\mathfrak{m}\}) = \mathrm{Proj}\left(\sum \mathfrak{a}^n \otimes_{\mathcal{R}} \frac{\mathcal{R}}{\mathfrak{m}\mathcal{R}}\right) = \mathrm{Proj}\left(\sum \frac{\mathfrak{a}^n}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n}\right)$$

et il est immédiat de voir que $\mathrm{Proj}\left(\sum \frac{\mathfrak{a}^n}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}^n}\right)$ et $\mathrm{Proj}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R}))$ ont même espace topologique sous-jacent.

Par conséquent, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})$ est 0-connexe.

C.Q.F.D

Théorème 4.0.10 *Soit $\mathcal{R}$ un anneau local, universellement caténaire et universellement japonais et $\mathfrak{a}$ un idéal de définition de $\mathcal{R}$, alors, si $\mathcal{R}$ est (S_i), $i \geq 2$, $gr_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})$ est $(i-2)$-connexe.*

Démonstration : Procédons par récurrence sur i, le cas $i = 1$ étant démontré.

Soit donc $\mathcal{R}$ vérifiant la condition (S_i), alors $\mathcal{R}/x$ est (S_{i-1}) pour tout x paramètre de $\mathcal{R}$, et en particulier pour tout x tel que $\overline{x}$ soit paramètre de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})$.

En appliquant alors l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R}/x)$ est $(i-3)$-connexe pour tout x tel que $\overline{x}$ soit paramètre de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})$. Or $\mathcal{R}$ étant (S_i), $\mathcal{R}$ est équidimensionnel, donc vérifie le théorème 3.0.2, c'est-à-dire que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R}/x)$ et $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})/\overline{x}$ ont même espace topologique sous-jacent et donc $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})/\overline{x}$ est $(i-3)$-connexe pour tout $\overline{x}$ paramètre de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})$, ce qui signifie exactement que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})$ est $(i-2)$-connexe.

C.Q.F.D

Remark 4.0.11 *La démonstrationn ci-dessus prouve, en fait, que si $\mathcal{R}$ est un anneau local, équidimensionnel, universellement caténaire et universellement japonais, de profondeur r, avec $2 \leq r \leq \dim \mathcal{R}$, et si $x_1, \dots, x_{r-2}$ est une suite régulière dans $\mathcal{R}$, dont les formes dominantes $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{r-2}$ se prolongent en un système de paramètres, alors*

$$Proj\left(\frac{gr_{\mathfrak{a}}(\mathcal{R})}{(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{r-2}})\right)$$

est connexe.

Bibliographie

[1] D. Ress, G-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals, Proc. Cambridge Philos. Soc. 57 (1961), p. 8-17.

[2] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebraè vol. 2, Ed. Van Nostrand, Princeton, 1960.

[3] C. Lech, On the associativity formula for multiplcities, Ark. Mat. 3 (1956), P. 301-314.

[4] H. Matsumura, Commutative Algebra, Ed. V.A. Benjamin Inc. New York, 1970.

[5] R. Hartshorne, Complete intersections and connectedness, AM. J. Math. 84, (1962), p. 497-508.

[6] A. Grothendieck, E.G.A. III, Publications de l'I.H.E.S. no 11 (1961).

[7] D.G. Northcott - D. Rees, Reductions of ideals in local rings , Proc. Cambridge Philos. Soc. 50 (1954), p. 145-158.