ELEMENTS D'ALGEBRE COMMUTATIVE

Maîtrise de Mathématiques
Université d'Angers
2003/04

D. Schaub

Chapitre 4

Algèbres tensorielle, symétrique et extérieure

4.1 Algèbre tensorielle d'un module

Définition 4.1.1 *Un anneau $\mathbb{N}$-gradué est un anneau A qui peut s'écrire comme somme directe $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ de sous-groupes et tel que la multiplication a la propriété suivante : pour tous $x \in A_r,\ y \in A_s$, le produit xy appartient à A_{r+S}.*

En particulier, A_0 est un sous-anneau de A. Les éléments de A_n sont appelés *éléments homogènes de degré n*. La propriété de la multiplication traduit donc le fait que le produit d'un élément homogène de degré r et d'un élément homogène de degré s est un élément homogène de degré $r+s$.

Exemples : 1) les anneaux de polynômes $A[x]$ et, plus généralement, $A[x_1,\ldots,x_n]$ sont des anneaux gradués (par le degré (total)). Ce sont même des A-algèbres graduées.

2) Une façon d'obtenir un anneau gradué consiste à se donner une collection de groupes A_n et de mettre sur la somme directe $\bigoplus_n A_n$ un produit ayant la bonne propriété sur les degrés. Il suffit pour cela d'avoir des applications $A_r \times A_s \to A_{r+s}$ et d'étendre par bilinéarité. Ainsi, par exemple, x_1, x_2, y_1, y_2 étant des éléments homogènes, $(x_1+x_2)\times(y_1+y_2) = x_1\times x_2 + x_1 \times y_2 + x_2\times y_1 + x_2\times y_2$.

Soit à présent A un anneau et M un A-module. On définit

$$T^r(M) = \underbrace{M\otimes\cdots\otimes M}_{r \text{ fois}} = \bigotimes_{i=1}^{r} M$$

pour $r>0$ et $T^0(M) = A$.
On a alors, pour tous p,q une application naturelle définie sur les générateurs et étendue par bilinéarité :

$$\begin{array}{rcl} T^p(M)\times T^q(M) & \to & T^{p+q}(M) \\ (x_1\otimes\cdots\otimes x_p, y_1\otimes\cdots\otimes y_q) & \mapsto & x_1\otimes\cdots\otimes x_p\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_q \end{array}.$$

Considérons alors $T(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(M)$. Cet ensemble $T(M)$ est alors naturellement muni d'une structure de A-algèbre graduée, appelée *algèbre tensorielle de M*. La multiplication est évidemment induite par les applications ci-dessus.

Remarquons que les éléments de $T^1(M)$ engendrent alors $T(M)$ comme A-algèbre ie. tout élément de $T(M)$ peut s'écrire comme somme finie $\sum a x^\alpha y^\beta \cdots z^\omega$ où $a\in A,\ x,y,\ldots,z \in$

$T^1(M) = M,\ \alpha, \beta, \ldots, \omega \in \mathbb{N}$. On dit encore que $T(M)$ est engendré par ses éléments homogènes de degré 1.

Fonctorialité : Si $f : M \to N$ est une application A-linéaire, alors, pour tout p, on obtient, par factorisation de l'application bilinéaire $f^p : M^p \to N^p \to T^pN$, une application linéaire $T^p(f) = \overbrace{f \otimes \cdots \otimes f}^{p \text{ fois}} : T^p(M) \to T^p(N)$, d'où l'on déduit une application $T(f) : T(M) \to T(N)$ déjà définie sur les éléments homogènes et étendue par linéarité. On vérifie que $T(f)$ est un homomorphisme d'algèbres.

Proposition 4.1.1 *Si E est un A-module libre de base $\{e_1, \ldots, e_m\}$, alors, pour tout p, $T^p(E)$ est un A-module libre de base $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p},\ 1 \leq i_s \leq m$ et tout $x \in T(E)$ peut s'écrire comme somme finie $x = \sum_p \sum_{(i_1,\ldots,i_p)} a_{i_1,\ldots,i_p} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}$.*

Preuve : C'est simplement une généralisation du résultat **??**.

Remarque : Rappelons encore que $T^n(M)$ satisfait à la propriété universelle suivante : *toute application n-linéaire $M^n \to N$ se factorise uniquement à travers une application linéaire $T^n(M) \to N$* (ceci n'est bien sûr qu'une traduction dans ce contexte de la propriété universelle du produit tensoriel).

4.2 Algèbre symétrique

Soit A un anneau commutatif et M un A-module (de type fini). Considérons dans l'anneau $T(M)$ l'idéal $\mathcal{I}$ engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$ pour tous les $x, y \in M$.

Définition 4.2.1 *On appelle algèbre symétrique de M et on note $S(M)$ (ou $S_A(M)$ ou $Sym(M)$) le quotient $T(M)/\mathcal{I}$.*

On dit qu'un module M sur un anneau gradué $A = \oplus_n A_n$ est un *A-module gradué* si M peut s'écrire comme somme directe de sous-groupes $M = \oplus_n M_n$ tels que, pour, tous $a_p \in A_p$, $x_q \in \mathbb{N}_q$, $a_p x_q \in M_{p+q}$. Un exemple de module gradué est celui d'idéal gradué d'un anneau gradué. On peut d'ailleurs remarquer qu'un idéal est gradué ssi il peut être engendré par des éléments homogènes (contre-exemple : $A = k[X, Y]$ gradué par le degré total, I l'idéal engendré par $X + Y^2$ n'est pas gradué).

L'idéal considéré ici, $\mathcal{I}$, est un idéal gradué ie. $\mathcal{I} = \oplus \mathcal{I}_r$ où $\mathcal{I}_r = \mathcal{I} \cap T^r(M)$ est un sous-module de $T^r(M)$. Notons $S^r(M) = T^r(M)/\mathcal{I}_r$, qu'on appellera *puissance symétrique n-ième*, le quotient. L'algèbre symétrique est graduée par $S(M) = \oplus S^r(M)$ et, comme $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_1 = \{0\}$, on a des identifications canoniques $S^0(M) = A$ et $S^1(M) = T^1(M) = M$. Notons $\phi : M \to S(M)$ l'injection canonique. Nous noterons encore xy le produit des éléments $x, y \in S(M)$, càd. l'image de $x \otimes y$ dans le quotient.

Proposition 4.2.1 *L'algèbre $S(M)$ est commutative.*

En effet, pour tous $x, y \in M$, $xy = yx$ par définition de $S(M)$. Comme $S(M)$ est engendré par les $x \in M$, on en déduit le résultat.

Proposition 4.2.2 *Toute application linéaire f d'un A-module M dans une A-algèbre B telle que $f(x)f(y) = f(y)f(x)$, pour tous $x, y \in M$ se factorise uniquement à travers un homomorphisme de A-algèbres $g : S(M) \to B$ (De plus, si B est graduée et $f(M) \subset B_1$, g est gradué).*

Preuve : une application $f : M \to B$ définit une application n-linéaire $f^n : M^n \to B$ par $f^n(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$ pour tout n, d'où par factorisation (propriété universelle de $T^n(M)$), une application linéaire $T^n f : T^n(M) \to B$, pour tout n, et donc une application de la somme directe $Tf : T(M) \to B$. La propriété de commutation, $f(x)f(y) = f(y)f(x)$, signifie alors que $Tf(\mathcal{I}) = 0$, donc Tf passe au quotient $g : S(M) \to B$.

Corollaire 4.2.1 *Si M et N sont des A-modules et $u : M \to N$ une application A-linéaire, alors il existe un unique homomorphisme d'algèbres (gradué) $S(u) : S(M) \to S(N)$ tel que $\phi_N \circ u = S(u) \circ \phi_M$ où $\phi_M : M \to S(M)$ et $\phi_N : N \to S(N)$ désignent les injections canoniques.*

Preuve : Composant les applications $u : M \to N$ avec l'injection canonique $\phi_N : N \to S(N)$, on obtient $\alpha : M \to S(N)$ telle que $\alpha(x)\alpha(y) = \alpha(y)\alpha(x)$. La proposition qui précède implique alors que α se factorise à travers $\phi_M : M \to S(M)$.

Définition 4.2.2 *Une application $f : M^n \to N$ est symétrique, si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et tout élément $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$, $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$.*

$S^n(M)$ est aussi caractérisé par une propriété universelle :

Proposition 4.2.3 *Toute application n-linéaire symétrique $f : M^n \to N$ se factorise de manière unique à travers $S^n(M)$ ie. $Hom_A(S^n(M), N)$ s'identifie à l'ensemble des applications n-linéaires symétriques sur M.*

Preuve : Soit donc $f : M^n \to N$ une application n-linéaire symétrique. Comme elle est n-linéaire, elle se factorise uniquement à travers une application linéaire $g : T^n(M) \to N$. Mais cette dernière vérifie $g(\mathcal{I}_n) = 0$ par la propriété de symétrie, d'où elle se factorise par $\tilde{g} : S^n(M) \to N$.

Proposition 4.2.4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S^n(M \oplus N) \cong \oplus_k(S^k(M) \otimes S^{n-k}(N))$ et, par conséquent, $S(M \oplus N) \cong S(M) \otimes S(N)$.*

Preuve : Posons $E = M \oplus N$ et commençons par construire une application $\oplus_k(S^k(M) \otimes S^{n-k}(N)) \to S^n(E)$. Pour tout i, l'application $M^i \to S^i(E)$ définie par $(x_1, \ldots, x_i) \mapsto x_1 \cdots x_i$ est i-linéaire symétrique, donc induit par passage au quotient une application linéaire $S^i(M) \to S^i(E)$. On a de même, pour tout j, une application linéaire $S^j(N) \to S^j(E)$.

On en déduit donc une application bilinéaire $S^i(M) \times S^j(N) \to S^i(E) \times S^j(E) \to S^{i+j}(E)$ qui passe au quotient par $S^i(M) \otimes S^j(N) \to S^{i+j}(E)$ et l'application cherchée par extension à la somme directe.

Il s'agit à présent de construire une application en sens inverse $S^n(E) \to \bigoplus_{k=0}^n S^k M \otimes S^{n-k} N$, à savoir $z \mapsto (\eta_0(z), \ldots, \eta_n(z))$ où $\eta_k(z) \in S^k M \otimes S^{n-k} N$. Définissons $E^n \to S^k M \otimes S^{n-k} N$ comme l'application $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \mapsto \sum_H x_H \otimes y_K$ où $H \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $h_1 < h_2 < \cdots < h_k$ et $K = \{1, \ldots, n\} - H$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-k}$ et $x_H = x_{h_1} \cdots x_{h_k}$, $y_K = y_{k_1} \cdots y_{k_{n-k}}$. Cette application est n-linéaire symétrique, donc définit uniquement une application $\eta_k : S^n E \to S^k M \otimes S^{n-k} N$, d'où η.

On vérifie que ces deux applications sont bien inverses l'une de l'autre.

Le passage aux algèbres provient simplement du fait que le produit tensoriel commute aux sommes directes (même infinies).

Théorème 4.2.1 *L'algèbre symétrique d'un A-module libre de rang n est isomorphe à l'algèbre de polynômes $A[x_1, \ldots, x_n]$.*

Preuve : Raisonnons par récurrence sur le rang n du module libre L. Si $n = 1$, soit e une base de L, alors l'application $\alpha : L \to A[x]$ définie par $e \mapsto x$ vérifie bien les propriétés de commutativité $\alpha(v)\alpha(w) = \alpha(w)\alpha(v),\ \forall v, w \in L$, donc se factorise à travers un homomorphisme de A-algèbres graduées $\phi : S(L) \to A[x]$. Au rang k, $S^k(L)$ est libre de rang 1, engendré par e^k, et l'application envoie e^k sur y^k, donc, clairement, ϕ est un isomorphisme.

Supposons donc le résultat acquis pour tout module libre de rang $\leq n-1$. Soit donc L de rang n. On peut choisir un vecteur $e \in L$ tel que $L = Ae \oplus N$ avec N libre de rang $n-1$ (par choix d'une base contenant e par exemple). Alors, d'après la proposition précédente, $S(L) = S(N \oplus Ae) \cong S(N) \otimes S(Ae)$. Or, par hypothèse de récurrence, $S(N) \cong A[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ et on a vu $S(Ae) \cong A[x]$. D'où $S(L) \cong A[y_1, \ldots, y_{n-1}] \otimes_A A[x] \cong A[y_1, \ldots, y_{n-1}, x]$.

Remarque : notons au passage que la k-ième puissance symétrique d'un module libre E de rang fini n est libre de rang $\binom{n+k-1}{n-1}$, de base $e_1^{k_1} \cdots e_n^{k_n}$ où $k = \sum k_i$ et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ désigne une base de E.

Exercice : Vérifier que $A[x] \otimes_A A[y] \cong A[x, y]$ et, plus généralement, le résultat admis en fin de preuve ci-dessus.

4.3 Algèbre extérieure

Soit $\mathcal{I}_r$ le sous-module de $T^r(M)$ engendré par les éléments du type $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ avec $x_i = x_j$ pour un $i \neq j$.

Soit $\bigwedge^r(M) = T^r(M)/\mathcal{I}_r$ le quotient. On a une application r-linéaire naturelle

$$\begin{array}{ccccc} \phi : \underbrace{M \times \cdots \times M}_{r \text{ fois}} & \to & T^r(M) & \to & \dfrac{T^r(M)}{\mathcal{I}_r} = \bigwedge^r(M) \\ (x_1, \ldots, x_r) & \mapsto & x_1 \otimes \cdots \otimes x_r & \mapsto & \overline{x_1 \otimes \cdots \otimes x_r}. \end{array}$$

Celle-ci est *alternée* car si $x_i = x_j$ pour un couple $(i, j),\ i \neq j$, alors $\phi((x_1, \ldots, x_r)) = 0$.

La propriété suivante traduit la nature universelle de $\bigwedge^r(M)$

Proposition 4.3.1 *Toute application r-linéaire alternée $f : M^r \to N$ se factorise de manière unique à travers une application linéaire $f_* : \bigwedge^r M \to N$ telle que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} M^r \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & \bigwedge^r M \arrow[d, "f_*"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Preuve : Cela résulte de la propriété universelle de $T^r(M)$ puisque toute application r-linéaire, $f : M^r \to N$ se factorise à travers $\phi : T^r(M) \to N$ et $\phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Comme, de plus, l'application f est alternée, càd. $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si $x_i = x_j$ avec $i \neq j$, cela signifie précisément que ϕ s'annule sur $\mathcal{I}_r$, donc passe au quotient $T^r(M)/\mathcal{I}_r$.

Notations : on notera $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_r$ la classe de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ dans le quotient et on parlera du *produit extérieur* des x_i.

Le A-module $\bigwedge M = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigwedge^r M$ a une structure naturelle de A-algèbre graduée, engendrée par les éléments homogènes de degré 1, appelée *algèbre extérieure* ("alternating algebra" en anglais) de M. Le produit étant défini par $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, y_1 \wedge \cdots \wedge y_m) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_m$ après avoir pris soin de vérifier que cette "application" était bien définie.

Une alternative à cette définition est de montrer que $\mathcal{I} = \bigoplus \mathcal{I}_r$ est un idéal **gradué** de $T(M)$ et de définir $\bigwedge M$ comme le quotient (gradué) de l'algèbre graduée $T(M)$ par l'idéal gradué $\mathcal{I}$.

Proposition 4.3.2 *1) Pour tous $x, y, x_1, \ldots, x_n \in M$, $x \wedge y = -y \wedge x$ et, plus généralement, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(n)} = \epsilon(\sigma) x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ ;*

2) Si H, K désignent deux sous-ensembles complémentaires de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $(i_h)_{1 \leq h \leq p}$, $(j_k)_{1 \leq k \leq n-p}$ les éléments de H et K respectivement, rangés par ordre croissant, soient $x_H = x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$ et $x_K = x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_{n-p}}$. Alors $x_H \wedge x_K = (-1)^\nu x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$ où ν désigne le nombre de couples $(i, j) \in H \times K$ tels que $i > j$.

Preuve : Il suffit de remarquer que $0 = (x+y) \wedge (x+y) = x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y = x \wedge y + y \wedge x$. Le cas général s'en déduit en décomposant σ en produit de transpositions. Le 2) n'en est qu'une application.

Proposition 4.3.3 *Soit $f : M \to N$ une application A-linéaire, on en déduit, pour tout r, une application A-linéaire, $\bigwedge^r f : \bigwedge^r M \to \bigwedge^r N$, et un homomorphisme de A-algèbres graduées $\bigwedge f : \bigwedge M \to \bigwedge N$.*

Preuve : On "définit" $\bigwedge^r f$ par $\bigwedge^r f(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_r) = f(x_1) \wedge f(x_2) \wedge \cdots \wedge f(x_r)$ et $\bigwedge f$ par linéarité.

Proposition 4.3.4 *Si B est une A-algèbre commutative et $f : M \to B$ A-linéaire telle que $f(x)^2 = 0$, $\forall x \in M$, alors il existe un unique homomorphisme $g : \bigwedge M \to B$ de A-algèbres tel que $f = g \circ i$ où $i : M \to \bigwedge M$ désigne l'inclusion naturelle.*

Preuve : L'application f induit une application r-linéaire $M^r \to B$, pour tout r, par $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto f(x_1) \cdots f(x_r)$. Celle-ci se factorise donc à travers $T^r(M)$, d'où une application $T(M) \to B$ qui est un homomorphisme d'algèbres et $f(x)^2 = 0$ signifie simplement qu'elle s'annule sur $\mathcal{I}$, donc passe au quotient $\bigwedge M$.

Proposition 4.3.5 *Si M et N sont des A-modules, on un isomorphisme canonique*

$$\textstyle\bigwedge^n (M \oplus N) \cong \bigoplus_j (\bigwedge^j M \otimes \bigwedge^{n-j} N).$$

Preuve : Posons $E = M \oplus N$. Pour tout i, on a une application i-linéaire alternée $M^i \to \bigwedge^i E$ définie par $(x_1, \ldots, x_i) \mapsto (x_1 + 0) \wedge (x_2 + 0) \wedge \cdots \wedge (x_i + 0)$ qui se factorise donc uniquement à travers une application A-linéaire $\phi_i : \bigwedge^i M \to \bigwedge^i E$. De même, pour tout j, une application A-linéaire $\psi_j : \bigwedge^j N \to \bigwedge^j E$.

L'application composée $\bigwedge^i M \times \bigwedge^j N \to \bigwedge^i E \otimes \bigwedge^j E \to \bigwedge^{i+j} E$ définie par $(x, y) \mapsto \phi_i(x) \wedge \psi_j(y)$ est clairement bilinéaire, donc se factorise à travers $\bigwedge^i M \otimes \bigwedge^j N \to \bigwedge^{i+j} E$. On en déduit donc une application naturelle de la somme directe $\phi : \bigoplus_k (\bigwedge^j M \otimes \bigwedge^{k-j} N) \to \bigwedge^k E$.

Il s'agit à présent de définir une application en sens inverse $\theta : \bigwedge^k E \to \bigoplus_k (\bigwedge^j M \otimes \bigwedge^{k-j} N)$. Pour cela, définissons, pour $z \in E$, $\theta(z) = (\theta_0(z), \ldots, \theta_k(z))$ où $\theta_j : \bigwedge^k E \to \bigwedge^j M \otimes \bigwedge^{k-j}$. Cette dernière application est définie par factorisation de l'application k-linéaire alternée $\kappa : E^k \to \bigwedge^j M \otimes \bigwedge^{k-j} N$ définie par $(x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k) \mapsto \sum_H \epsilon(\sigma_H) x_H \otimes y_K$ où $H = \{h_1, \ldots, h_j\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, $h_1 < h_2 < \cdots < h_j$ et $K = \{1, 2, \ldots, k\} - H$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_{k-j}$ et $\epsilon(\sigma_H)$ la signature de la permutation $\sigma_H : H \cup K \to \{1, 2, \ldots, k\}$.

La vérification (pas entièrement triviale) que $\phi \circ \theta = \mathrm{Id}$ et $\theta \circ \phi = \mathrm{Id}$ est laissée en exercice.

Proposition 4.3.6 *Si E est un A-module libre de base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, pour $r > n$, $\bigwedge^r E = 0$, si $1 \leq r \leq n$, $\bigwedge^r E$ est libre de base $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$, de rang $\binom{n}{r}$.*

Preuve : On prouve le résultat par récurrence sur le rang n et en utilisant le résultat précédent sur la décomposition du produit extérieur d'une somme directe.
Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
Supposons donc que, pour $k \leq n-1$, le résultat est vrai, à savoir, pour tout A-module libre L de rang $k \leq n$, $\bigwedge^r L$ est libre de base $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq k$.

Ecrivons alors $E = Ae_1 \oplus F$ où $F =< e_2, \ldots, e_n >$. Alors le résultat précédent dit que $\bigwedge^r E = Ae_1 \otimes \bigwedge^{r-1} F \oplus \bigwedge^r F$. Or une base de $\bigwedge^{r-1} F$ est donnée par $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r-1}}$, $2 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{r-1} \leq n-1$, d'où une base de $Ae_1 \otimes \bigwedge^{r-1} F$: $e_1 \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r-1}}$, qui par l'application ϕ ci-dessus s'envoie sur $e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{r-1}}$. De même, une base de $\bigwedge^r F$ est donnée par $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$, $2 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$. D'où le résultat.

4.4 Déterminants

Soit E un A-module libre de rang n et $u : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors $\bigwedge^n u \in \mathrm{End}_A(\bigwedge^n E)$ et $\bigwedge^n E$ est libre de rang 1 (donc isomorphe à A). Or $\phi : A \to \mathrm{End}_A(\bigwedge^n E)$ définie par $a \mapsto (x \mapsto ax)$ réalise un isomorphisme canonique entre A et $\mathrm{End}_A(\bigwedge^n E)$.

Définition 4.4.1 *On appelle déterminant de u, on note* $\det(u)$ *l'élément $\phi^{-1}(\bigwedge^n u)$ de A.*

Par définition de $\bigwedge^n u$, on a
$$(\textstyle\bigwedge^n u)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_n) = \det(u) x_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$
Conséquences : a) $\det(u \circ v) = (\det u)(\det v)$.
En effet, $\det(u \circ v)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \bigwedge^n (u \circ v)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = (u \circ v)(x_1) \wedge \cdots \wedge (u \circ v)(x_n) = u(v(x_1)) \wedge \cdots \wedge u(v(x_n)) = (\bigwedge^n u)(v(x_1) \wedge \cdots \wedge v(x_n)) = (\det u)(\bigwedge^n v(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)) = (\det u)(detv)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$.

b) Si u est inversible, $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$.
On applique le résultat précédent à $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_E$, d'où $1 = \det(\mathrm{Id}) = (\det u)(\det(u^{-1})$.

Définition 4.4.2 *Soit $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $x_1, \ldots, x_n \in E$, on appelle déterminant de $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, et on note* $\det_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n)$, *le déterminant* $\det(u)$ *où $u : E \to E$ est l'endomorphisme défini par $e_i \mapsto x_i$.*

Il s'ensuit donc que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_n) = \det(u) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \det_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ et, en particulier, $\det_{\mathcal{E}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Proposition 4.4.1 *Pour tout endomorphisme v,* $\det(v(x_1), \ldots, v(x_n)) = \det v \det_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n)$.

Preuve : Soit u l'endomorphisme défini par $u(e_i) = x_i$, alors $v(x_1) \wedge \cdots \wedge v(x_n) = (v \circ u)(e_1) \wedge \cdots (v \circ u)(e_n) = \det(v \circ u) e_1 \wedge \cdots e_n$ et d'autre part $v(x_1) \wedge \cdots \wedge v(x_n) = \det(v) x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = \det(v) \det(u) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. D'où le résultat

L'application $\det_{\mathcal{E}} : E^n \to A$ ainsi définie est une forme n-linéaire alternée telle que $\det_{\mathcal{E}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Proposition 4.4.2 *Toute forme n-linéaire alternée sur E^n est de la forme $\alpha \det_{\mathcal{E}}$, $\alpha \in A$.*

Preuve : Soit $f : E^n \to A$, et soit $\alpha = f(e_1, \ldots, e_n)$, alors $f(e_1, \ldots, e_n) = \alpha \det_{\mathcal{E}}(e_1, \ldots, e_n)$. Les deux formes n-linéaires f et $\alpha \det_{\mathcal{E}}$, coïncidant sur une base, sont donc égales. (Rappelons à ce sujet que l'ensemble $\mathcal{A}_n(E; A)$ des n-formes linéaires alternées sur E est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\bigwedge^n E, A) \cong \mathrm{Hom}(A, A)$ et donc de rang 1, ce qu'on retrouve ici).

Théorème 4.4.1 *Un endomorphisme d'un A-module libre E de rang fini est bijectif ssi son déterminant est inversible dans A.*

Preuve : Soit $u \in End_A(E)$. Si u est bijectif, alors, il existe un endomorphisme inverse u^{-1} et $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_E$. D'où $1 = \det(\mathrm{Id}) = \det(u)\det(u^{-1})$, donc $\det(u)$ est inversible dans A.

Inversement, supposons $\det(u)$ inversible. Soit alors $x_1, \ldots, x_n$ une base de E. Montrons que $u(x_1), \ldots, u(x_n)$ est une base de E, ce qui suffit à prouver que u admet un inverse (l'application $u(x_i) \mapsto x_i$).

Le système $u(x_1), \ldots, u(x_n)$ est libre. En effet, supposons qu'il existe une combinaison linéaire non triviale $\lambda_1 u(x_1) + \cdots + \lambda_n u(x_n) = 0$ alors l'un des λ_i, supposons par exemple λ_1, est non nul, d'où l'on déduit que $\lambda_1 u(x_1) = \mu_2 u(x_2) + \cdots + \mu_n u(x_n)$. Mais alors, $\lambda_1 \det_{\mathcal{E}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det_{\mathcal{E}}(\lambda_1 u(x_1)), \ldots, u(x_n) = 0$. Or, $\det(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u)\det_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, d'où $\lambda_1 = 0$, ce qui est contradictoire.

Il reste à montrer que le système est aussi générateur. Soit $f : E^n \to A$ la forme linéaire alternée telle que $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ et $g : E^{n+1} \to E$ l'application $n+1$-linéaire définie par $g(z, y_1, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, y_n)z + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(z, y_1, \ldots, \hat{y_i}, \ldots, y_n) y_i$ pour tous $z, y_1, \ldots, y_n \in E$. Cette application est clairement $(n+1)$-linéaire et alternée, donc nulle (car $\bigwedge^{n+1} E = 0$) : $g(z, y_1, \ldots, y_n) = 0$, $\forall z, y_1, \ldots, y_n$. En particulier, pour tout $x \in E$, $g(x, u(x_1), \ldots, u(x_n)) = 0$, ce qui se traduit par $f(u(x_1), \ldots, u(x_n))x = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f(x, u(x_1), \ldots, \widehat{u(x_i)}, \ldots, u(x_n)) u(x_i)$. Comme $f(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) f(x_1, \ldots, x_n) = \det(u)$ est inversible, on en déduit que x s'écrit bien en fonction des $u(x_i)$.

Exercice : Montrer qu'un système de vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ d'un module libre E est une base ssi $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$ et $\det(x_1, \ldots, x_n)$ inversible dans A. En particulier, pour un espace vectoriel, il suffit que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$.

Définition 4.4.3 *Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée $n \times n$. On appelle déterminant de M le déterminant de l'endomorphisme u dont M est la matrice dans une base donnée (ou alternativement, le déterminant du système des vecteurs colonnes dans la base canonique de A^n). C'est, bien entendu, indépendant de la base choisie.*

Soit $H = \{h_1, \ldots, h_p\}$ et $K = \{k_1, \ldots, k_p\}$ des suites croissantes d'entiers entre 1 et n. On appelle mineur d'indices H, K le déterminant de la matrice, qu'on notera $M_{H,K}$, constituée des intersections des lignes $h_1, \ldots, h_p$ avec les colonnes $k_1, \ldots, k_p$.

Proposition 4.4.3 *Pour une famille d'éléments $\{x_1, \ldots, x_p\}$ d'un A-module libre E de rang n, désignons par M la matrice $n \times p$ dont la i-ème colonne est constituée des coordonnées de x_i dans une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Alors on a*

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_p = \sum_K \det(M_{K,H}) e_K$$

où $H = \{1, \ldots, p\}$ et K décrit l'ensemble des suites croissantes $1 \leq k_1 < k_2 \cdots < k_p \leq n$, l'ensemble des $e_K = e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_p}$ constituant une base de $\bigwedge^p E$.

Preuve : Il suffit de calculer $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ en utilisant les propriétés de p-linéarité et d'alternance. Ainsi, calculons la K-ème composante de $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p = (\sum_j a_{j1} e_j) \wedge (\sum_j a_{j2} e_j) \wedge \cdots \wedge (\sum_j a_{jp} e_j)$ dans la base des e_K.

Or la matrice $M_{K,H}$ est la matrice de l'application linéaire composée de $A^p \to A^n$ de matrice A dans les bases canoniques $\mathcal{E}' = \{e'_1, \ldots, e'_p\}$ et $\mathcal{E}$, et $pr_K : A^n \to A^p$, la projection sur le sous-espace engendré par les p vecteurs de la base canonique de A^n d'indices $k_1, \ldots, k_p$. On a donc $\bigwedge^p (pr_K \circ M)(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_p) = \det(_{K,H}) e_K$.

D'autre part, $\bigwedge^p (pr_K \circ M)(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_p) = \bigwedge^p (pr_K)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p)$ n'est autre que la K-ème composante cherchée, d'où le résultat.

Corollaire 4.4.1 *Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux modules libres de rang respectivement m et n. Soit M la matrice de u dans les bases $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ et soit $p \leq \inf(m, n)$. Alors l'application $\bigwedge^p u : \bigwedge^p E \to \bigwedge^p F$ a pour matrice dans les bases $\{e_K\}_{1 \leq <k_1 < \cdots < k_p \leq m}$ et $\{f_H\}_{1 \leq h_1 < \cdots < h_p \leq n}$ la matrice à $\binom{n}{p}$ lignes et $\binom{m}{p}$ colonnes de terme général $\det(M_{H,K})$.*

Preuve : On applique le résultat précédent à $(\bigwedge^p u)(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_p}) = u(e_{k_1}) \wedge \cdots \wedge u(e_{k_p}) = \sum_K \det(M_{H,K}) f_H$.

Posons, pour H, K deux parties croissantes de $[1, n]$, $\rho_{H,K} = 0$ si $H \cap K \neq \emptyset$ et $\rho_{H,K} = (-1)^\nu$ où ν est le nombre de couples $(h, k) \in H \times K$ tels que $h > k$ sinon.

Théorème 4.4.2 Formule de Laplace *Soient M une $n \times n$ matrice, $H = \{h_1, \ldots, h_p\}$ avec $1 \leq h_1 < \cdots < h_p \leq n$. Désignons encore par H' la partie ordonnée complémentaire de H. Alors*

$$\det(M) = \rho_{H,H'} \sum_R \rho_{R,R'} \det(M_{R,H}) \det(M_{R',H'})$$

où R parcourt les suites croissantes à p éléments entre 1 et n, R' désignant son complémentaire.

Preuve : Soit $K = \{k_1, \ldots, k_{n-p}\}$, $1 \leq k_1 < \cdots < k_{n-p} \leq n$, K' la partie ordonnée complémentaire de K et notons u l'endomorphisme de A^n représenté par M dans la base canonique. En appliquant la proposition 4.4.3, on a, avec les notations de ce résultat,

$$(\textstyle\bigwedge^p u)(e_H) = \sum_R \det(M_{R,H}) e_R \quad \text{et} \quad (\bigwedge^{n-p} u)(e_K) = \sum_S \det(M_{S,K}) e_S.$$

On en déduit : $(\bigwedge^p u)(e_H) \wedge (\bigwedge^{n-p} u)(e_K)$

$$= \textstyle\sum_R \det(M_{R,H}) \det(M_{R',K}) e_R \wedge e_{R'} = \sum_R \rho_{R,R'} \det(M_{R,H}) \det(M_{R',K}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

puisque $e_R \wedge e_S = 0$ si $R \cap S \neq \emptyset \Rightarrow e_R \wedge e_S \neq 0$ ssi $S = R'$.

Si $K = H'$, on a aussi $(\bigwedge^p u)(e_H) \wedge (\bigwedge^{n-p} u)(e_K) = u(e_{h_1}) \wedge \cdots \wedge u(e_{h_p}) \wedge u(e_{k_1}) \wedge \cdots \wedge u(e_{k_{n-p}}) = \rho_{H,H'} u(e_1) \wedge \cdots \wedge u(e_n) = \rho_{H,H'} \det(u) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.

En rapprochant les deux formules, on obtient le résultat.

Remarque : 1) Lorsque $K \neq H'$, on a $H \cap K \neq \emptyset$ et, par conséquent, $e_H \wedge e_K = 0$, d'où

$$\textstyle\sum_R \rho_{R,R'} \det(M_{R,H}) \det(M_{R',K}) = 0.$$

2) La formule de Laplace pour $p = 1$ n'est autre que la formule bien connue de développement par rapport à la ligne d'indice h_1.

Théorème 4.4.3 *Soit E un module libre de rang n et $u : E \to E$ un endomorphisme ; soit encore $a, b \in A$, alors $\det(aId_E + bu) = \sum_{k \geq 0} Tr(\bigwedge^k u) a^{n-k} b^k$.*

Preuve : Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E et $M = (m_{ij})$ la matrice de u dans cette base. Le déterminant est obtenu par calcul de $(a\mathrm{Id} + bu)(e_1) \wedge \cdots \wedge (a\mathrm{Id} + bu)(e_n) = (ae_1 + bu(e_1)) \wedge \cdots \wedge (ae_n + bu(e_n))$ qui est égal à la somme des termes $a^{n-p} b^p z_K$ où $z_K = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$ avec $x_i = u(e_i)$ si $i \in K$ et $x_i = e_i$ si $i \in H = [1, n] - K$, p parcourant les entiers de 1 à n et, pour chaque p, K est l'ensemble des suites $1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq n$. De même, on supposera les h_i rangés par ordre croissant.

On a $z_K = \rho_{H,K} e_{h_1} \wedge \cdots \wedge e_{h_{n-p}} \wedge u(e_{k_1}) \wedge \cdots \wedge u(e_p)$ et $u(e_{k_1}) \wedge \cdots \wedge u(e_{k_p}) = \sum_L \det(M_{L,K}) e_L$. Par conséquent, $z_K = \rho_{H,K} \sum_L \det(M_{L,K}) e_H \wedge e_L$.

Comme $e_H \wedge e_L = 0$ sauf si $H \cap L = \emptyset$ ie. $L = K$, on en déduit $z_K = \det(M_{K,K}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ et le coefficient de $a^{n-p} b^p$ est alors $\sum_K \det(M_{KK})$. Or ces éléments constituent la diagonale de la matrice de $\bigwedge^p(u)$. On en tire aisément le résultat.

Corollaire 4.4.2 *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'espaces vectoriels sur un corps k est égal à $P(x) = \sum_k Tr(\bigwedge^{n-k} u)(-x)^k$.*

Preuve : Si $u \in \mathrm{End}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, alors le polynôme caractéristique de u est précisément le déterminant de l'endomorphisme de $k[X]$-modules $u - X\mathrm{Id}$ où l'on continue à noter u l'endomorphisme $u \otimes 1 : E \otimes k[X] \to E \otimes k[X]$. Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent.

Bibliographie

[1] S. LANG, Algèbre, Addison-Wesley.

[2] M.F. ATIYAH, I.G. MACDONALD, Introduction to Commutative Algebra, Addison Wesley Publishing.

[3] R. GODEMENT, Cours d'Algèbre, Herrmann

[4] H. MATSUMURA, Commutative Algebra, Benjamin.

[5] N. BOURBAKI, Algèbre

[6] S. MAC LANE, G. BIRKHOFF, Algèbre 2, les Grands Théorèmes, Gauthier-Villars.

[7] J.P. SERRE, Représentation linéaire des groupes finis.

[8] FULTON, HARRIS, Representations, Springer.

[9] O. ZARISKI, P. SAMUEL, Commutative Algebra, Van Nostrand.

Table des matières