ELEMENTS D'ALGEBRE COMMUTATIVE

Maîtrise de Mathématiques
Université d'Angers
2003/04

D. Schaub

Chapitre 3

Produit tensoriel

3.1 Définitions

3.1.1 Applications multilinéaires

Soient M et N deux A-modules et $M \times N$ leur produit cartésien "ensembliste".

Définition 3.1.1 *Une application f de $M \times N$ dans un A-module Q est A-bilinéaire si, pour tous $a_1, a_2 \in A,\ x, x_1, x_2, \in M,\ y, y_1, y_2 \in N,$ on a $f(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1f(x_1, y) + a_2f(x_2, y)$ et $f(x, a_1y_1 + a_2y_2) = a_1f(x, y_1) + a_2f(x, y_2)$.*

Cela équivaut à dire que f est bilinéaire ssi les applications partielles $f_y : M \to Q$ et $f_x : N \to Q$ définies par $f_y(x) = f(x, y)$ et $f_x(y) = f(x, y)$ sont A-linéaires, pour tous y et x fixés.

Exemples : - les formes bilinéaires symétriques tels que le produit scalaire de vecteurs ;

- Si M est un A-module, son **dual**, $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$, est un A-module et l'application $f : M^* \times M \to A$ définie par $f(u, x) = u(x)$ est bilinéaire.

Soient maintenant $M_1, \ldots, M_n$ des modules sur l'anneau A et Q un A-module quelconque.

Définition 3.1.2 *Une application $f : M_1 \times \cdots \times M_n \to Q$ est n-linéaire si toutes les applications partielles $x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ sont linéaires.*

Lorsque $Q = A$, on parlera plutôt de *formes* bilinéaires ou multilinéaires.

On peut aussi considérer le cas où $M = M_1 = \cdots = M_n$ et $f : M^n \to Q$. On peut alors imposer des conditions supplémentaires à la fonction n-linéaire f, comme, par exemple, d'être *alternée*, à savoir $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dès que $x_i = x_j$ pour $i \neq j$.

Un exemple bien connu de formes n-linéaire alternée sur un espace vectoriel M de dimension n (ou, plus généralement, sur un module libre de rang n) est le *déterminant* $\det : M^n \to A$ donné, par exemple, par la formule $\det(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$ où les $(x_{ij})_j$ sont les coordonnées du vecteur x_i dans une base de M.

3.1.2 Définition

Soient A un anneau (commutatif unitaire), M et N deux A-modules. Considérons le A-module libre L **engendré** par tous les couples $(x, y), x \in M, y \in N$, i.e. on peut le voir comme $\bigoplus_{(x,y) \in A \times B} A$ (sous-module du produit $A^{M \times N}$).

Soit S le sous-module engendré par tous les éléments du type : $(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y)$, $(x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2)$, $(ax, y) - a(x, y)$, $(x, ay) - a(x, y)$, où $x, x_1, x_2 \in M$, $y, y_1, y_2 \in N$, $a \in A$.

On a bien sûr une inclusion naturelle $j : M \times N \to L$ donnée par $j((x, y)) = (x, y)$ (qui n'est **pas** A-linéaire!!!, en effet, dans L, (ax, ay) est linéairement indépendant de (x, y)). Composant j avec la surjection naturelle π de L dans le quotient L/S, on obtient une application $\varphi : M \times N \to L/S$, comme l'illustre le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\phi"'] & L \arrow[d, "\pi"] \\ & L/S \end{tikzcd}$$

Cette application ϕ est A-bilinéaire, c'est-à-dire :

$$\varphi((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y)) = \alpha_1 \varphi(x_1, y) + \alpha_2 \varphi(x_2, y)$$

$$\varphi((x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = \alpha_1 \varphi(x, y_1) + \alpha_2 \varphi(x, y_2)$$

pour tous $x, x_1, x_2 \in M, y, y_1, y_2 \in N, \alpha_1, \alpha_2 \in A$.

Vérifions, à titre d'exemple, l'une des conditions : $\varphi((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y)) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = (\alpha_1 x_1, y) + (\alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$.

Une autre façon de définir L est comme l'ensemble des applications $M \times N \to A$ presque partout nulles. Dans cette approche, $j : M \times N \to L$ est définie par $(x, y) \mapsto f_{(x,y)}$ où $f_{(x,y)}(x', y') = 0, \forall (x', y') \neq (x, y)$ et $f_{(x,y)}(x, y) = 1$.

Définition 3.1.3 *Le A-module L/S est appelé produit tensoriel de M et de N et noté $M \otimes_A N$. On notera $x \otimes y$ la classe du couple (x, y). Ces $x \otimes y$ engendrent le A-module $M \otimes N$. Plus précisément, tout élément de $M \otimes N$ est une somme finie de la forme $\sum x_i \otimes y_i$.*

Remarques : 1) On vient de voir qu'il y a une application bilinéaire naturelle $\varphi : M \times N \to M \otimes_A N$.

2) On a $x \otimes 0 = x \otimes (y - y) = x \otimes y + x \otimes (-y) = x \otimes y - x \otimes y = 0$ et de même $0 \otimes y = 0$.

3.1.3 Propriété universelle

Soit G un A-module quelconque et $f : M \times N \to G$ une application bilinéaire. On peut alors définir une application linéaire $h : L \to G$ par l'exigence que h soit linéaire et que $h((x, y)) = f((x, y))$, quel que soit $(x, y) \in M \times N$. (l'ensemble $\{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$ forme une **base** de L ; alors, h est définie parce qu'on se donne les images de tous les éléments d'une base!).

L'application f étant bilinéaire, $h(S) = 0$. Autrement dit, h se factorise à travers L/S :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G \\ & L/S \arrow[ur, "h^*"'] & \end{tikzcd}$$

Comme h est définie uniquement par f et h^* uniquement par h, h^* est uniquement définie. Le couple $(M \otimes N, \varphi)$ est caractérisé par la *propriété universelle* suivante :

Proposition 3.1.1 *Toute application bilinéaire $f : M \times N \to G$ se factorise de manière unique à travers une application linéaire $M \otimes_A N \to G$.*

En fait, c'est cette propriété qui sera, en général, utilisée pour déterminer le produit tensoriel (et non la définition), car elle caractérise le produit tensoriel à isomorphisme près.

Preuve : En effet, supposons qu'un autre couple (T, ψ), où T est un A-module et $\psi : M \times N \to T$ une application bilinéaire, vérifie la même propriété universelle, autrement dit, toute application bilinéaire β de $M \times N$ dans un module G se factorise à travers ψ et une application linéaire $\gamma : T \to G$.
Or, $\varphi : M \times N \to M \otimes N$ est une application bilinéaire, d'où elle se factorise à travers ψ et une application linéaire $\theta : T \to M \otimes N$. Inversement, $(M \otimes N, \varphi)$ ayant la propriété et $\psi : M \times N \to T$ étant une application bilinéaire, elle se factorise à travers $\eta : M \otimes N \to T$.
Il faut encore vérifier que $\theta \circ \eta = \mathrm{Id}_{M \otimes N}$ et $\eta \circ \theta = id_T$. La situation est décrite par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & M \otimes N \arrow[dl, shift left, "\eta"] \\ T \arrow[ur, shift left, "\theta"'] & \end{tikzcd} .$$

La composée $\theta \circ \psi : M \times N \to M \otimes N$ est une application bilinéaire, donc se factorise, de manière unique, à travers $M \otimes N$.

Or $\psi = \eta \circ \varphi$, d'où $\theta \circ \eta \circ \varphi = \theta \circ \psi$, autrement dit

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\theta\circ\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \otimes N \\ M \otimes N \arrow[ur, "\theta\circ\eta"'] & \end{tikzcd}$$

où l'on voit que $\theta \circ \eta$ constitue une telle factorisation. Mais, d'un autre côté, $id_{M \otimes N}$ est clairement une autre factorisation. Par unicité, on conclut donc que $\theta \circ \eta = id_{M \otimes N}$. On procède de même pour $\eta \circ \theta$.
Conclusion : $T \cong M \otimes N$ où φ correspond à ψ.

Exemples : * Si n, m sont des entiers tels que $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$, alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = 0$; de même $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

* Si V, W sont des espaces vectoriels sur un corps k, alors $V \otimes W = 0 \Rightarrow V = 0$ ou $W = 0$.

Exercice : Montrer plus généralement que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(n, m)\mathbb{Z}$.

3.2 Propriétés du produit tensoriel

3.2.1 Premiers résultats

Lemme 3.2.1 *$A \otimes_A M \cong M$.*

Preuve : Il s'agit de montrer que le couple (M, ψ) où $\psi : A \times M \to M$ est l'application $\psi((a, x) = ax$, satisfait à la propriété universelle. Soit $f : A \times M \to R$ une application bilinéaire quelconque, alors f se factorise à travers ψ et $h : M \to R$ telle que $h(y) = f((1, y))$. En effet : $h(\psi((a, x)) = h(ax) = f((1, ax)) = af((1, x)) = f((a, x))$.
De plus, h est uniquement déterminée : soit h', linéaire, telle que $f = h' \circ \psi$. Montrons que $h(y) = h'(y), \forall y \in M$. Or $\psi(1, y) = y$, d'où $h(y) = h(\psi((1, y)) = f((1, y)) = h'(\psi((1, y)) = h'(y)$.

Remarque : L'isomorphisme envoie $a \otimes x$ sur ax.

Lemme 3.2.2 *$A^n \otimes_A M \cong M^n$.*

Preuve : La démonstration est similaire à celle ci-dessus. On va montrer que le couple (M^n, ψ) où $\psi : A^n \times M \to M^n$ est l'application bilinéaire définie par $\psi(((a_1, .., a_n), x)) = (a_1 x, \ldots, a_n x)$ vérifie la propriété universelle.
Soit $f : A^n \times M \to R$ une application bilinéaire quelconque. Désignons par $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de A^n. On remarque que : $\psi(((a_1, .., a_n), x)) = \sum_{i=1}^n a_i \psi(e_i, x)$.
On définit alors $h : M^n \to R$ par $h((y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^n f(e_i, y_i)$. On a :

$$\begin{aligned} h(\psi(((a_1, .., a_n), x)) &= h((a_1 x, \ldots, a_n x)) = \sum_{i=1}^n f(e_i, a_i x) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i f(e_i, x) = f(\sum_{i=1}^n a_i e_i, x) = f((a_1, \ldots, a_n), x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $f = h \circ \psi$. L'unicité de h se vérifie immédiatement comme précédemment.

Remarque : L'isomorphisme envoie $((a_1, \ldots, a_n) \otimes x)$ sur $(a_1 x, \ldots, a_n x)$.

Soit $f : M \to P$ et $g : N \to Q$ deux applications linéaires. On peut alors leur faire correspondre une application linéaire, notée $f \otimes g$, de $M \otimes N$ dans $P \otimes Q$, vérifiant $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$.

En effet, composant $(f, g) : M \times N \to P \times Q$ avec l'application canonique $P \times Q \to P \otimes Q$, on obtient une application bilinéaire de $M \times N$ dans $P \otimes$Q. Celle-ci se factorise donc à travers $M \otimes N$. On vérifie aisément qu'elle vérifie bien la propriété est ci-dessus.

Remarque Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[d, "\text{can}"'] & P \times Q \arrow[d] \\ M \otimes N \arrow[r, "f \otimes g"] & P \otimes Q \end{tikzcd}$$

En particulier, on a les :

Lemme 3.2.3 *Si $M \cong P$ et $N \cong Q$, alors $M \otimes N \cong P \otimes Q$.*

Lemme 3.2.4 *$M \otimes N \cong N \otimes M$.*

Les preuves, très simples, sont laissées en exercice. On montre, par exemple dans le premier cas, que $(P \otimes Q, f \otimes g \circ \text{can})$ vérifie la propriété universelle pour M et N.

Proposition 3.2.1 *Si M et N sont libres de type fini, de bases $\{e_1, \ldots, e_m\}$, $\{f_1, \ldots, f_n\}$, respectivement, alors $M \otimes N$ est libre de base $\{e_i \otimes f_j \mid i = 1, .., m; j = 1, .., n\}$.*

Preuve : C'est une conséquence des lemmes ci-dessus. En effet, si M (respt. N) admet une base de cardinal m (respt. n), alors $M \cong A^m$ (respt. $N \cong A^n$).
Un tel isomorphisme est réalisé en envoyant e_i(respt. f_j) sur le i-ème (respt. j-ème) élément de la base canonique de A^m (respt. A^n). On déduit alors des isomorphismes précédents que $M \otimes N \cong A^m \otimes A^n$; i.e. $M \otimes N$ est libre de rang mn. On vérifie en explicitant les différents isomorphismes que les $e_i \otimes f_j$ forment une base de $M \otimes$N (en fait, les $e_i \otimes f_j$ forment un système de générateurs, en nombre mn, d'un modulelibre de rang mn, donc constituent une base).

3.2.2 Relations entre $\otimes$ et $\oplus$

Théorème 3.2.1 *Il y a un isomorphisme (A-linéaire) θ entre $M\otimes(P\oplus Q)$ et $(M\otimes P)\oplus(M\otimes Q)$ tel que $\theta(m\otimes(p+q)) = (m\otimes p) + (m\otimes q)$.*

Preuve : Soit $f : M\times(P\oplus Q)\to(M\otimes P)\oplus(M\otimes Q)$ déterminée par $f((m,p+q)) = (m\otimes p) + (m\otimes q)$. Comme f est bilinéaire, elle se factorise à travers $M\otimes(P\oplus Q)$ en une application θ, A-linéaire telle que $\theta(m\otimes(p+q)) = (m\otimes p) + (m\otimes q)$.
Construisons un inverse à θ : soient $\alpha_P : M\otimes P\to M\otimes(P\oplus Q)$ telle que $m\otimes p\mapsto m\otimes(p+0)$ (telle que l'application $\alpha_P : M\times P\to M\otimes(P\oplus Q)$) et $\alpha_Q : M\otimes Q\to M\otimes(P\oplus Q)$ définie de la même façon par $m\otimes q\mapsto m\otimes(0+q)$, linéaires, d'où, par la propriété de somme directe, une application $\kappa : (M\otimes P)\oplus(M\otimes Q)\to M\otimes(P\oplus Q)$ telle que $m\otimes p+n\otimes q\mapsto\alpha_P(m\otimes p)+\alpha_Q(m\otimes q) = m\otimes p+n\otimes q$. On vérifie immédiatement sur les éléments du type $m\otimes p+n\otimes q$ que $\theta\circ\kappa = \mathrm{Id}_{M\otimes P+N\otimes Q}$ et sur les éléments $m\otimes(p+q)$ que $\kappa\circ\theta = \mathrm{Id}_{M\otimes(P+Q)}$, d'où, par linéarité, le résultat.

Remarque On a également : $(P\oplus Q)\otimes M\cong(P\otimes M)\oplus(Q\otimes M)$.

3.2.3 Relations entre $\otimes$ et Hom

Désignons par $\mathrm{Bilin}(M,N;P)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $M\times N$ dans un module P. L'ensemble $\mathrm{Bilin}(M,N;P)$ est naturellement muni d'une structure de A-module.

Proposition 3.2.2 *Bilin*$(M,N;P)\cong\mathrm{Hom}_A(M\otimes N,P)$.

Preuve : Il faut expliciter des applications dans les deux sens. Soit $f : M\times N\to P$ une application bilinéaire, on lui associe l'application linéaire $\alpha(f) : M\otimes N\to P$ définie par la propriété universelle de $M\otimes N$.
Inversement, si $g : M\otimes N\to P$ est une application linéaire, on lui fait correspondre $\beta(g) = g\circ\varphi$ où $\varphi : M\times N\to M\otimes N$ est l'application bilinéaire canonique.
Il suffit alors de vérifier que les correspondances α et β sont inverses l'une de l'autre.
D'une part, $\alpha(f)$ est définie par : $f = \alpha(f)\circ\varphi$ et $\beta(\alpha(f)) = \alpha(f)\circ\varphi$, d'où $\beta(\alpha(f)) = f$.
D'autre part, $\beta(g) = g\circ\varphi$ est une application bilinéaire de $M\times N$ dans P, donc elle se factorise à travers $M\otimes N$ par $\alpha(\beta(g))$ par définition de α. Or, g elle-même factorise déjà $g\circ\varphi$, d'où, par unicité de la factorisation, $\alpha(\beta(g)) = g$.

Théorème 3.2.2 $\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_A(N,P))\cong$*Bilin*$(M,N;P)\cong\mathrm{Hom}_A(M\otimes N,P)$.

Preuve : Le dernier isomorphisme vient d'être démontré ci-dessus.
Construisons une application $\mathrm{Bilin}(M,N;P)\to\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_A(N,P))$. Soit $h : M\times N\to P$ une application bilinéaire, on lui associe l'application linéaire $\ell_h : M\to\mathrm{Hom}_A(N,P)$ donnée par

$$\begin{array}{cccccccc} \ell_h & : & M & \to & \mathrm{Hom}_A(N,P) & & & \\ & & x & \mapsto & \ell_h(x) : & N & \to & P \\ & & & & & y & \mapsto & h(x,y) \end{array}.$$

On vérifie aisément que les deux correspondances $h\mapsto\ell_h$ et $\ell\mapsto h_\ell$ sont linéaires et inverses l'une de l'autre.

Rappelons que le *dual* d'un A-module M est $\mathrm{Hom}_A(M,A)$.

Proposition 3.2.3 *Soit E,F des A-modules libres de type fini (ie. de rang fini). Il y a un isomorphisme (fonctoriel) $E^*\otimes F\to Hom(E,F)$ tel que, pour tous $f\in E^*$ et $x\in E, y\in F$, $f\otimes y\mapsto\lambda : E\to F$ où $\lambda(x) = f(x)y$.*

Preuve : L'application $E^* \times F \to \mathrm{Hom}(E,F)$ qui envoie (f,y) sur λ est clairement bilinéaire et, par conséquent, se factorise à travers $E^* \otimes F$ de la façon décrite. Il suffit alors d'exhiber un inverse à cette application linéaire.

Soit donc $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale. Soit enfin $\lambda \in \mathrm{Hom}(E,F)$. On associe à λ l'élément $\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes \lambda(e_i)$. On vérifie immédiatement que cette application linéaire est bien inverse de l'autre, d'où l'isomorphisme.

Cas particulier : Lorsque $E = F$, la proposition ci-dessus donne un isomorphisme $E^* \otimes E \cong \mathrm{End}_A(E)$.

Exercice : montrer que, pour un A-module libre de rang fini E, l'application *trace* d'un endomorphisme coïncide avec la composée $\mathrm{End}_A(E) \to E^* \otimes E \to A$ où la dernière application est $f \otimes x \mapsto f(x)$.

3.2.4 Suites exactes et $\otimes$

Théorème 3.2.3 *Soit* $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\psi} E'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de A-modules, alors la suite* $E' \otimes F \xrightarrow{\phi\otimes Id_F} E \otimes F \xrightarrow{\psi\otimes Id_F} E'' \otimes F \longrightarrow 0$ *est exacte pour tout A-module F.*

Preuve : Il faut montrer que : i) $\psi \circ \mathrm{Id}_F$ est surjective ; pour cela, il suffit, par linéarité de montrer que tout élément du type $x'' \otimes y$ admet un antécédent. Mais, $x'' \in E'' \Leftrightarrow \exists x \in E$ tel que $x'' = \psi(x)$; d'où : $(\psi \otimes \mathrm{Id}_F)(x \otimes y) = x'' \otimes y$.

ii) $(\psi \otimes \mathrm{Id}_F) \circ (\varphi \otimes \mathrm{Id}_F) = 0$. Il suffit à nouveau de le vérifier pour des éléments du type $x' \otimes y$. Or : $(\psi \otimes \mathrm{Id}_F)((\varphi \otimes \mathrm{Id}_F)(x' \otimes y)) = (\psi \otimes \mathrm{Id}_F)(\varphi(x') \otimes \mathrm{Id}_F) = \psi(\varphi(x')) \otimes y = 0 \otimes y = 0$. D'où l'inclusion : $Im(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F) \subseteq \ker(\psi \otimes \mathrm{Id}_F)$.

iii) Il reste à vérifier l'inclusion : $\ker(\psi \otimes \mathrm{Id}_F) \subseteq Im(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F) = I$. D'après le point précédent et la propriété universelle d'un quotient, $\psi \otimes \mathrm{Id}_F$ se factorise à travers $(E \otimes F)/I$:

$$\begin{tikzcd}
E \otimes F \arrow[rr] \arrow[dr] & & E'' \otimes F \\
& (E \otimes F)/I \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Construisons un inverse à gauche pour f, i.e. $g : E'' \otimes F \to (E \otimes F)/I$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{(E\otimes F)/I}$, d'où l'on conclura que f est injective (en effet, si $z \in (E \otimes F)/I$ est tel que $f(z) = 0$, alors $z = gf(z) = 0$) et, par conséquent, l'inclusion cherchée.

Soit $x'' \in E''$, alors $\exists x \in E$ tel que $x'' = \psi(x)$. Considérons alors $\alpha : E'' \times F \to (E \otimes F)/I$ donnée par $(x'', y) \mapsto \overline{x \otimes y}$.

Cette application est bien définie : soit $x_1 \in E$ tel que $\psi(x_1) = x''$. Alors $\psi(x_1 - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 - x \in Im(\varphi) \Leftrightarrow (x_1 - x) \otimes y \in Im(\varphi \otimes \mathrm{Id}_F) = I$. D'où : $x \otimes y - x_1 \otimes y = (x - x_1) \otimes y \in I \Leftrightarrow \overline{x \otimes y} = \overline{x_1 \otimes y}$. De plus, α est clairement bilinéaire, donc se factorise à travers une unique application linéaire $g : E'' \otimes F \to (E \otimes F)/I$ telle que $g(x'' \otimes y) = \overline{x \otimes y}$. On a : $gf(\overline{x \otimes y}) = g((\psi \otimes \mathrm{Id}_F)(x \otimes y)) = g(\psi(x) \otimes y) = \overline{x \otimes y}$. D'où $gf = \mathrm{Id}$ par linéarité.

Remarque : On a aussi $f \circ g = \mathrm{Id}_{E''\otimes F}$: $fg(x'' \otimes y) = f(\overline{x \otimes y}) = \psi(x) \otimes y = x'' \otimes y$. Donc, en fait, f est un isomorphisme.

Contre-exemple : Si $\varphi : E'' \to E$ est injective, il **n**'est **pas** vrai, en général, que $\varphi \otimes \mathrm{Id}_F$ le soit encore. En effet, soit $\varphi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ où $\mathbb{Q}$ est considéré comme un $\mathbb{Z}$-module et tensorisons sur $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi\otimes id} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0!!$$

Corollaire 3.2.1 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'un anneau A et M un A-module. Alors, il y a un isomorphisme : $A/\mathcal{I} \otimes_A M \longrightarrow M/\mathcal{I}M$ tel que $(\overline{a}, x) \mapsto \overline{ax}$.*

Preuve : La suite $0 \longrightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow A/\mathcal{I} \longrightarrow 0$ est une suite exacte de A-modules. On peut donc lui appliquer le théorème précédent et on obtient une suite exacte :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I} \otimes_A M \arrow[r, "\alpha\otimes\mathrm{Id}"] & A \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "c"', "\cong"] & A/\mathcal{I} \otimes_A M \arrow[r] & 0 \, . \\ & M & & \end{tikzcd}$$

On a $c((\alpha\otimes\mathrm{Id})(\sum a\otimes x)) = \sum c(((\alpha\otimes\mathrm{Id})(a\otimes x)) = \sum c(\alpha(a)\otimes x) = \sum ax$ pour tous $a \in A$ et $x \in M$. Par conséquent, $Im(c\circ(\alpha\otimes\mathrm{Id})) = \mathcal{I}M$ et la suite : $0 \longrightarrow \mathcal{I}M \longrightarrow M \longrightarrow A/\mathcal{I} \otimes_A M \longrightarrow 0$ est donc exacte. Autrement dit : $M/\mathcal{I}M \cong A/\mathcal{I} \otimes_A M$. On vérifie immédiatement que l'inverse de cette application est bien celle annoncée.

Exercice : Donner une démonstration directe de ce corollaire.

3.3 Produits tensoriels itérés

Proposition 3.3.1 *Soient M, N, Q trois A-modules, alors il existe un unique isomorphisme $(M \otimes N) \otimes Q \to M \otimes (N \otimes Q)$ tel que $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$, pour tous $x \in M, y \in N, z \in Q$.*

Preuve : Une fois acquise l'existence, l'unicité provient du fait que les $(x \otimes y) \otimes z$ engendrent le produit $(M \otimes N) \otimes Q$.

Existence : pour tout $x \in M$, l'application $\lambda_x : N \times Q \to (M \otimes N) \otimes Q$ définie par $(y, z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z$ est clairement bilinéaire, donc se factorise à travers l'application linéaire $\overline{\lambda}_x : N \otimes Q \to (M \otimes N) \otimes Q$.

L'application $M \times (N \otimes Q) \to (M \otimes N) \otimes Q$ telle que $(x, \alpha) \mapsto \overline{\lambda}_x(\alpha)$ est aussi clairement bilinéaire, donc se factorise à travers une application linéaire $M \otimes (N \otimes Q) \to (M \otimes N) \otimes Q$.

Le même raisonnement en sens inverse donne l'application inverse.

Cette proposition montre donc l'associativité du produit tensoriel, ainsi nous pouvons écrire maintenant le produit $M \otimes N \otimes Q$ sans parenthèses. De plus, nous pouvons, par récurrence, définir le produit tensoriel d'un nombre quelconque de modules $M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n$.

Ce produit vérifie la propriété universelle suivante : *toute application n-linéaire $h : M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \to N$ se factorise uniquement à travers l'application n-linéaire canonique $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \to M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n$ donnée par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ et une application linéaire $\overline{h} : M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n \to N$.* On a donc $\overline{h}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)$.

3.4 Extension des scalaires

3.4.1 Généralités

Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et soit M un A-module. Alors B est naturellement muni d'une structure de A-module, par conséquent $M \otimes_A B$ est muni d'une structure de A-module.

Cependant, $M \otimes_A B$ peut être aussi muni d'une structure de B-module de la manière suivante : $B \times (M \otimes_A B) \longrightarrow M \otimes_A B$ où $(b, x \otimes b') \mapsto x \otimes bb'$.

On vérifie facilement que cette multiplication a les propriétés nécessaires.

Attention Il est **faux** de croire que, si M est un B-module, $M \otimes_A B$ considéré comme A-module est M. En effet :
Exemple : Soit $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Alors, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-module et $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est, comme $\mathbb{R}$-module isomorphe à $\mathbb{R}^4$.

Proposition 3.4.1 *Si N est un B-module de type fini et si B est de type fini comme A-module, alors, N est de type fini comme A-module.*

Preuve : Supposons que $N =\mathrm{By}_1 + \ldots +\mathrm{By}_n$ et $B = Ax_1 + \ldots + Ax_m$. Alors N est engendré sur A par les mn produits $x_i y_j$.

Proposition 3.4.2 *Si M est un A-module de type fini, alors, $M \otimes_A B$ est un B-module de type fini.*

Preuve : Si $x_1, \ldots, x_n$ engendrent M sur A, alors les $x_i \otimes 1$ engendrent $M \otimes_A B$ comme B-module.

Remarque : il existe une application A-linéaire naturelle $M \to M_{\otimes A} B$ définie par $x \mapsto x \otimes 1$.

3.4.2 Localisation

Proposition 3.4.3 *Soit A un anneau et S une partie multiplicative de A, alors : $S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M$.*

Preuve : Soit $\varphi : S^{-1}A \times M \to S^{-1}M$ l'application $(a/s, x) \mapsto (ax)/s$. Elle est clairement A-bilinéaire, donc se factorise à travers $f : S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$. Cette application f est surjective puisque $\frac{x}{s} = f(\frac{1}{s} \otimes x)$. Cherchons le noyau de f.
On a $f(\frac{1}{s} \otimes x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{s} = 0 \Leftrightarrow \exists t \in S$ tel que $tx = 0$. D'où, $\frac{1}{s} \otimes x = \frac{t}{ts} \otimes x = \frac{1}{ts} \otimes tx = 0$.

Or, tout élément de $S^{-1}A \otimes_A M$ est de la forme $\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes x_i = \sum_i \frac{a_i'}{s} \otimes x_i$ (quitte à réduire au même dénominateur) $= \sum_i \frac{1}{s} \otimes a_i' x_i = \frac{1}{s} \otimes \sum a_i' x_i$, donc est de la forme $\frac{1}{s} \otimes x$ où $x = \sum_i a_i' x_i$.
Donc, $f(\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes x_i) = f(\frac{1}{s} \otimes x) = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes x_i = \frac{1}{s} \otimes x = 0$ d'où $\mathrm{Ker}(f) = 0$ et f est injective.

Corollaire 3.4.1 *Si la suite* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$ *est exacte, alors, pour toute partie multiplicative S de A, la suite*

$$0 \longrightarrow S^{-1}M' \longrightarrow S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M" \longrightarrow 0$$

est exacte.

Preuve : Toute l'exactitude sauf l'injection à gauche provient du résultat précédent et de l'exactitude (à droite) de $\otimes$. En ce qui concerne l'injectivité de $S^{-1}f : S^{-1}M' \to S^{-1}M$, soit $x'/s \in S^{-1}M'$ tel que $S^{-1}(x'/s) = 0$. Alors, par définition de $S^{-1}f$, $0 = S^{-1}f(x'/s) = f(x')/s$, d'où $\exists t \in S$ tel que $tf(x') = f(tx') = 0$, et, par injectivité de f, $tx' = 0$. Mais alors, $x' = \frac{x'}{1} = 0$ dans $S^{-1}M'$.

3.4.3 Algèbres

Définition 3.4.1 *Un ensemble B est muni d'une structure de A-algèbre si B est muni d'une loi interne $+$, d'une multiplication interne $\cdot$ telles que $(B, +, \cdot)$ soit un anneau (commutatif) unitaire et une multiplication externe $\times$ par les éléments de A, telle que $(B, +, \times)$ soit un A-module et une compatibilité entre $\cdot$ et $\times$: $\forall a \in A, b, b' \in B, a \times (b \cdot b') = (a \times b) \cdot b' = b \cdot (a \times b')$.*

Un homomorphisme de A-algèbres $f : B \to B'$ est un homomorphisme de A-modules et d'anneaux.

Proposition 3.4.4 *Si B et C sont deux A-algèbres (commutatives), alors $B \otimes_A C$ est naturellement muni d'une structure de A-algèbre par $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$, pour tous $a, c \in B,\ b, d \in C$.*

Preuve : $B \otimes_A C$ est un A-module et le produit ainsi défini a bien les propriétés requises.

Exemples : - Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, alors le produit $a \cdot b = f(a)b$ définit sur B une structure de A-module. Mais, cette multiplication vérifie : $a(bb') = f(a)(bb') = (f(a)b)b' = (ab)b' = b(f(a)b') = b(ab')$. B est donc muni ainsi d'une structure de A-algèbre. Cas particulier : $A \subset B$.

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre, pour tout n. Cela fournit, en particulier, un exemple où A n'est pas inclus dans B.

Bibliographie

[1] S. LANG, Algèbre, Addison-Wesley.

[2] M.F. ATIYAH, I.G. MACDONALD, Introduction to Commutative Algebra, Addison Wesley Publishing.

[3] R. GODEMENT, Cours d'Algèbre, Herrmann

[4] H. MATSUMURA, Commutative Algebra, Benjamin.

[5] N. BOURBAKI, Algèbre

[6] S. MAC LANE, G. BIRKHOFF, Algèbre 2, les Grands Théorèmes, Gauthier-Villars.

[7] J.P. SERRE, Représentation linéaire des groupes finis.

[8] FULTON, HARRIS, Representations, Springer.

[9] O. ZARISKI, P. SAMUEL, Commutative Algebra, Van Nostrand.

Table des matières