LE SCHEMA DE HILBERT DES CUBIQUES DE $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

DE GENRE ARITHMETIQUE NUL.

par Daniel Schaub

1984

INTRODUCTION :

Dans un article intitulé "Schémas de Hilbert" (cf. [G]) , A. GROTHENDIECK a montré l'existence d'un schéma paramétrant toutes les courbes de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, de polynôme de Hilbert donné $P(n)$, appelé schéma de hilbert des courbes de polynôme $P(n)$.

Le premier exemple non trivial de tel schéma de Hilbert est celui des courbes de polynôme $P(n)= 3n + 1$, c'est-à-dire des cubiques de genre arithmétique 0 , que nous noterons $H_{3,0}$. Nous démontrons ici le théorème suivant :

THEOREME : $H_{3,0}$ a deux composantes irréductibles de dimension 12 et 15 , H_{12} et H_{15} , chacune d'elles lisse , s'intersectant transversalement suivant un sous-schéma de dimension 11 .

Notons que ce résultat a été obtenu également , séparément et par des méthodes différentes par R. PIENE et M. SCHLESSINGER (cf. [P-S]) . L'intérêt de cette nouvelle approche tient au caractère élémentaire et explicite des méthodes utilisées . En particulier , la description explicite des espaces tangents nous permettra de calculer les nombres de Betti de la composante H_{12} - cf. [S]) .

La démonstration de ce théorème se fera selon le plan suivant :

I) Courbes de degré 3 et de genre arithmétique 0 dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$;

II) Composantes connexes et composantes irréductibles de $H_{3,0}$;

III) Points singuliers et points réguliers de $H_{3,0}$.

Dans une quatrième partie , on montre, de plus , que la composante H_{15} , ensemble de courbes du type "cubique + point" , en fait , isomorphe à l'éclaté de $H \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, où H désigne le schéma de Hilbert des cubiques planes de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, le long de la courbe universelle au-dessus de H .

I). COURBES DE DEGRE 3 ET DE GENRE ARITHMETIQUE O DANS $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$:

Soit C une courbe de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, alors C est composée d'une ou plusieurs composantes irréductibles de dimension 1 et d'un nombre fini de points . Soit C' la réunion des composantes de pure dimension 1 ; c'est une courbe de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, contenue dans C et de Cohen-Macaulay .

Rappelons que le genre arithmétique p_a d'une courbe C est défini par :

$$p_a(C) = 1 - \chi(C,O_C)$$

ou encore par : $$p_a(C) = 1 - P_C(o)$$

où $\chi(C,O_C) = h^o(C,O_C) - h^1(C,O_C)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de C et $P_C(n)$ son polynôme de Hilbert .

De la suite exacte définissant C' à partir de C , à savoir :

$$o \longrightarrow K \longrightarrow O_C \longrightarrow O_{C'} \longrightarrow o$$

où K est un faisceau de O_C-modules concentré en un nombre fini de points $x_1,\ldots,$ $\ldots,x_n$, on déduit que :

$$p_a(C) = p_a(C') - h^o(K) = p_a(C') - \sum_{i=1}^{n} l(K_{x_i})$$

où $h^o(K)$ désigne la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^o(C,K)$ et $l(K_{x_i})$ la longueur du O_{x_i}-module K_{x_i} . De plus , si C' est constituée de n composantes connexes , alors $h^o(O_{C'}) = n$.

Soit maintenant C une cubique de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ et C' la courbe qui lui est associée de la manière décrite ci-dessus .

I.1. Si C' est une courbe plane :

Dans ce cas , C' est un diviseur de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et son genre arithmétique est alors 1 . Par conséquent , avec les notations ci-dessus , $h^o(K) = 1$; les courbes C et C' diffèrent donc d'un point x , isolé simple ou immergé simplement (i.e. $l(K_x)=1$) . Bien entendu la courbe C n'est pas nécéssairement plane .

I.2. Si la courbe C' est gauche :

2.1. Lorsqu'elle est irréductible et réduite , elle est lisse . En effet , supposons que C' ait un point au moins double x et projetons-la à partir de x sur un plan générique . Sa projection C'_o est alors une courbe plane de degré 1 , donc une droite D , et par conséquent , C' serait contenue dans le plan $<x,D>$, ce qui est exclu . Donc , dans ce cas , C' est bien lisse , donc isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et $p_a(C') = o$.

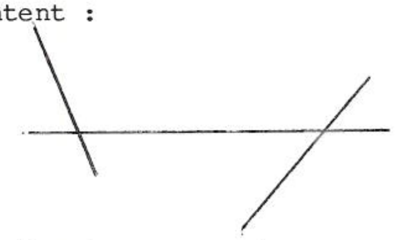
Par conséquent , $h^o(K) = o$, d'où K = O et C = C' .

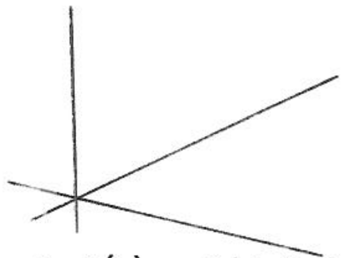
2.2. Si C' est réunion d'une conique lisse γ et d'une droite d :

- si γ et d ne se coupent pas , $p_a(C') = -1$, ce qui exclut ce cas .
- si γ et d se coupent (sans être coplanaires!) , $p_a(C')$ peut être calculé à partir de la normalisée de C' et on trouve $p_a(C') = o$; et à nouveau C = C' .

2.3. Si C' est réunion de trois droites distinctes ou confondues :

- si les trois droites sont deux à deux non coplanaires , C' a 3 composantes connexes et par conséquent , $p_a(C') = -2$, ce qui est à nouveau exclu .
- si deux d'entre elles sont coplanaires , $p_a(C') = -1$ et ce cas est également à exclure .
- si les trois sont concourantes (et bien entendu non planes) , deux cas se présentent :





Dans les deux cas , le genre arithmétique , calculé à partir de la normalisée, est nul , et , par conséquent , C = C' .

2.4. La courbe C' est constituée d'une droite double γ et d'une droite d .

2.5. La courbe C' est une droite triple .

Dans ces deux derniers cas , il nous faut calculer le genre arithmétique d'une droite double et d'une droite triple , et pour cela , d'abord les caratériser . C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant pour les droites triples , du moins celles susceptibles de nous intéresser (i.e. de genre $\geqslant o$) , la démonstration se transposant entièrement au cas des droites doubles .

I.3. <u>Droites triples de genre $\geqslant$ o</u> :

Nous allons montrer que toute droite triple non plane de genre $\geqslant 0$ est sur une quadrique singulière , et en fait , est d'un des deux types suivants (tous deux de genre O) :

3.1. droite triple définie par le carré de l'idéal d'une droite simple ;

3.2. droite triple située sur un cône quadratique .

Considérons une droite triple C et la droite simple D , support de C , et soient J et I les faisceaux d'idéaux correspondants .

On a alors les suites exactes suivantes (où l'on notera O_P le faisceau $O_{\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}}$) :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 \longrightarrow J \longrightarrow O_P \longrightarrow O_C \longrightarrow 0 \\[2ex] 0 \longrightarrow I \longrightarrow O_P \longrightarrow O_D \longrightarrow 0 \\[2ex] 0 \longrightarrow J \cap I^{p+1} \longrightarrow J \cap I^p \longrightarrow J \cap I^p/\, J \cap I^{p+1} \longrightarrow 0 \\[2ex] 0 \longrightarrow I^{p+1} \longrightarrow I^p \longrightarrow I^p/\, I^{p+1} \longrightarrow 0 \end{array}\right.$$

On déduit des deux premières que :

$$p_a(C) = \chi(J) \quad \text{et} \quad \chi(I) = p_a(D) = 0$$

et nous allons calculer $\chi(J)$ à l'aide des deux autres , en remarquant que J est I-primaire , autrement dit , qu'il existe $m \in N$ tel que $J \supset I^m$.

On a : $\chi(J \cap I^p) = \chi(J \cap I^{p+1}) + \chi(J \cap I^p/J \cap I^{p+1})$

et : $\chi(I^p) = \chi(I^{p+1}) + \chi(I^p/I^{p+1})$

d'où : $\chi(J) = \sum_{p=1}^{m-1} \chi(J \cap I^p/J \cap I^{p+1}) + \chi(J \cap I^m)$.

De même : $\chi(I) = \sum_{p=1}^{m-1} \chi(I^p/I^{p+1}) + \chi(I^m)$; et par conséquent :

$$\chi(J) - \chi(I) = \sum_{p=1}^{m-1} \{\chi(J \cap I^p/J \cap I^{p+1}) - \chi(I^p/I^{p+1})\} .$$

D'autre part , nous savons que I/I^2 est le faisceau conormal d'une droite dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, il est donc localement libre de rang 2 sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et par conséquent isomorphe à : $O_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus O_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Ce qui implique que , pour tout p , I^p/I^{p+1} (qui est en fait $S^p(I/I^2)$) est localement libre de rang $r_I^p = p+1$ et isomorphe à $O_{\mathbb{P}^1}(-p)^{p+1}$.

Par ailleurs , $J \cap I^p/J \cap I^{p+1}$ est un sous-faisceau d'un faisceau localement libre sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, il est sans torsion , donc localement libre de rang r_J^p .

Tensorisant par $O_P(n)$ toutes les suites exactes de (S) , celles-ci conservent leur exactitude ; ce qui conduit à :

$$\chi(J(n)) - \chi(I(n)) = \sum_{p=1}^{m-1} \{\chi(J \cap I^p/J \cap I^{p+1})(n) - \chi(I^p/I^{p+1})(n)\}$$

et les faisceaux du deuxième membre étant des faisceaux localement libres , on a :

$$\chi[(J \cap I^p/J \cap I^{p+1})(n)] - \chi[(I^p/I^{p+1})(n)] = (r_J^p - r_I^p)n + a \text{ , pour } n \gg 0 \text{ et } a \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs , les deux premières suites de (S) nous donnent :

$$\chi(J(n)) - \chi(I(n)) = \chi(O_D(n)) - \chi(O_C(n)) = -2n + b \text{ , pour } n \gg 0 \text{ et } b \in \mathbb{Z} .$$

Comparant les deux valeurs de cette différence , on en déduit que :

$$\underline{\sum_{p=1}^{m-1} (r_J^p - r_I^p) = -2} \ .$$

Si l'on remarque alors que $r_J^p = r_I^p$ implique la même égalité pour tout $q \geq p$ (en effet , $r_J^k = r_I^k$ équivaut à " $J \cap I^k/J \cap I^{k+1}$ et I^k/I^{k+1} coïncident au point générique ") , on s'aperçoit qu'il n'y a que deux cas possibles :

- $r_J^1 = 0$ et $r_J^k = r_I^k$ pour tout $k \geq 2$;
- $r_J^1 = 1$, $r_J^2 = 2$ et $r_J^k = r_I^k$ pour tout $k \geq 3$.

<u>Dans les deux cas cela implique $m = 3$, autrement dit $I^3 \subset J$</u> .

Comme par ailleurs , toujours de (S) , on déduit que $H^2(I(2)) = H^1(O_D(2)) = 0$ et que , d'autre part , puisque $I^k/I^{k+1} = O_{\mathbb{P}^1}(-k)^{k+1}$ implique $H^1(I^k/I^{k+1}(2)) = 0$, pour $k \leq 3$, une récurrence rapide nous conduit à :

$$\underline{H^2(I^{k+1}(2)) = 0 \text{ pour } k \leq 3} \ .$$

Les deux suites exactes : $0 \longrightarrow I^3 \longrightarrow J \cap I^2 \longrightarrow J \cap I^2/I^3 \longrightarrow 0$ et

$0 \longrightarrow J \cap I^2 \longrightarrow J \longrightarrow J/J \cap I^2 \longrightarrow 0$, nous permettent d'écrire successivement $H^2(J \cap I^2(2)) = 0$ et enfin : $\underline{H^2(J(2)) = 0}$.

Par ailleurs , le théorème de Riemann-Roch nous permettant d'écrire :
$\chi(O_C(2)) = 7 - p_a$, d'où $\chi(J(2)) = \chi(O_P(2)) - \chi(O_C(2)) = 3 + p_a$, on en déduit que : $h^0(J(2)) - h^1(J(2)) + h^2(J(2)) = 3 + p_a$, et comme $h^2(J(2)) = 0$,

$$\boxed{h^0(J(2)) = 3 + p_a + h^1(J(2)) \geqslant 3 + p_a}$$

<u>Conséquence</u> : lorsque $p_a \geqslant -2$, C appartient à au moins une quadrique , et , en fait , lorsque $p_a \geqslant 0$, C appartient à au moins trois quadriques indépendantes. Plaçons-nous dans ce dernier cas : $p_a \geqslant 0$.

- Si C est sur une quadrique lisse Q ; alors C est un diviseur de Q de type (3,0), la formule du genre nous donne alors : $p_a(C) = 1 + \frac{1}{2} C(C + K_Q) = -2$. Ce qui exclut donc ce cas .
- Si C appartient à un cône quadratique . Soit $T^2 - XY$ l'équation d'un tel cône et supposons que le support de C est alors la droite (T,X) . Il est facile alors (quitte à couper par un plan Y = a , a≠0) de se convaincre que C peut être définie par l'idéal homogène $(T^2 - XY , TX , X^2)$.

Comme la famille de courbes (C_ϵ) d'équations $T^2 - XY = 0$, $TX - \epsilon T = 0$, $X^2 - \epsilon X = 0$, est une déformation plate de C et que C_ϵ est constituée de trois droites concourantes et non planes , $p_a(C_\epsilon) = 0$ et donc $p_a(C) = 0$.
- Si C n'appartient qu'à des quadriques de rang $\leqslant 2$ et n'est pas plane , alors elle appartient à deux plans distincts , par exemple T = 0 et X = 0 .

Les autres quadriques linéairement indépendantes sont alors du type $(aT + bX)(cT + dX) = 0$ et l'idéal homogène saturé J_C de C contient alors l'idéal $(acT^2 + bdX^2 , a'c'T^2 + b'd'X^2 , TX)$ avec $(acb'd' - bda'c') \neq 0$, qui n'est autre que (T^2 , TX , X^2) . Ce dernier est homogène saturé et définit une courbe de degré 3 , par conséquent , $J_C = (T^2 , TX , X^2) = (T , X)^2$.

Remarquant que ce cas est une spécialisation plate du précédent (on spécialise le cône d'équation $T^2 - \epsilon XY = 0$ en $\epsilon = 0$) , on en conclut que , dans ce cas encore $p_a(C) = 0$.

I.4. <u>Cas des droites doubles</u> :

Les notations étant celles de I.2. , on constate que :

-- si $\gamma \cap d = \emptyset$, alors $0 \leqslant p_a(C') = p_a(\gamma) + p_a(d) - 1 = p_a(\gamma) - 1$, d'où $p_a(\gamma)$ doit être supérieur ou égal à 1 ;

-- si $\gamma \cap d = \{x\}$, deux cas sont possibles :

- soit d est transverse à γ (i.e. x est un point simple de $d \cap \gamma$) et , si $\hat{C}'$ désigne la transformée stricte de C' dans l'éclatement de x dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, on a : $0 \leqslant p_a(C') = p_a(\hat{C}') + 1 = p_a(\gamma)$;

- soit d est contenue dans le plan tangent à γ en x (i.e. x est un point double de $d \cap \gamma$) , et alors :
$0 \leqslant p_a(C') = p_a(\hat{C}') + 2 = p_a(\gamma) + 1$; d'où $p_a(\gamma) \geqslant -1$.

Par conséquent , les seules droites doubles qui interviennent dans notre liste sont les droites doubles de genre arithmétique $\geqslant -1$. Un raisonnement analogue à celui utilisé pour les droites triples montre que $p_a(\gamma) \leqslant 0$, pour toute droite double γ , et : $p_a(\gamma) = 0$ si et seulement si γ est plane ;
$p_a(\gamma) = -1$ si et seulement si γ est sur une quadrique lisse .

En conclusion , les seuls cas possibles sont :
--- $C = C' = d \cup \gamma$ où $d \cap \gamma \neq \emptyset$ et γ plane , d transverse à γ ;
--- $C = C' = d \cup \gamma$ où $d \cap \gamma \neq \emptyset$, $p_a(\gamma) = -1$ et $d \subset T_{\gamma,x}$.

I.5. <u>Les points immergés</u> :

Comme nous l'avons vu , lorsque C' est plane , C est obtenue par "adjonction" d'un point simple isolé ou immergé . Encore faut-il préciser comment un point peut être immergé simplement sur une cubique plane .

La question étant locale , nous nous placerons dans l'espace affine $\mathbb{C}^3$, muni de coordonnées T , X , Y , et considérerons la cubique plane C' d'équation $f = 0$ dans le plan $T = 0$, et nous supposerons le point $O = (0,0,0)$ immergé dans C .

On remarque aussi que si C' est lisse en O , la situation est localement isomorphe à celle du point immergé simplement sur une droite , à savoir la courbe définie par l'idéal (X^2 , XY) . On pourra donc supposer C' singulière en O .

Notons encore I l'idéal définissant la courbe C dans $\mathbb{C}^3$ . . Comme la longueur $l\{(T,f)/m(T,f)\} = 2$ (où m désigne l'idéal maximal (T,X,Y) dans $\mathbb{C}[T,X,Y]$) , et que , par hypothèse , $l\{(T,f)/I\} = 1$, cela impose $I \not\subset m(T,f)$; autrement dit $\exists g \in I$, $g = aT + bf$ tel que $a \notin m$ ou $b \notin m$, $a,b \in \mathbb{C}[T,X,Y]$.

On a alors les inclusions suivantes :

$$\begin{tikzcd} m(T,f) \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] \arrow[rrr, dash, dashed, bend right=50, "2"'] & (g) + m(T,f) \arrow[r, phantom, "\subset"] & I + m(T,f) \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & (T,f) \\ & & I \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, dash, dashed, "1"'] & \end{tikzcd}$$

d'où : $I = I + m(T,f) = (g) + m(T,f)$, autrement dit :

$$I = (aT + bf , T^2 , TX , TY , Xf , Yf) .$$

Par conséquent , si $a = a_o$ + termes de degré $\geqslant 1$ et de même $b = b_o + \ldots$, $a_o , b_o \in \mathbb{C}$, on a :

$$\underline{I = (a_oT + b_of , T^2 , TX , TY , Xf , Yf)} .$$

Deux cas sont , en fait , à distinguer :

- si $a_o = 0$, $I = (T^2 , TX , TY , f)$. On dira que le point est "hors du plan" .
- si $a_o \neq 0$, $I = (a_oT + b_of , Xf , Yf , T^2)$. Dans ce dernier cas , on remarquera que la dimension locale de plongement est alors 2 : on dira que le point est "immergé dans le plan" , bien que globalement la courbe ne soit pas plane . Comme cas particulier , on trouve , lorsque $b_o=0$, $I = (T,Xf,Yf)$, une courbe plane .

II). COMPOSANTES CONNEXES ET COMPOSANTES IRREDUCTIBLES DE $H_{3,O}$:

Nous allons montrer que le schéma de Hilbert des cubiques de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ de genre 0 , que nous noterons $H_{3,O}$, a une seule composante connexe constituée de deux composantes irréductibles , H_{12} , de dimension 12 , et H_{15} , de dimension 15 .

II.1. La composante H_{12} :

1.1. L'ensemble des cubiques gauches lisses forme un ouvert lisse U du schéma de Hilbert $H_{3,O}$, de dimension 12 . En effet , soit C une telle cubique ; C appartient à une quadrique lisse Q , d'où la suite exacte de O_C-modules :

$$0 \longrightarrow N_{C/Q} \longrightarrow N_{C/\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}} \longrightarrow N_{Q/\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}}|C \longrightarrow 0 .$$

D'autre part , C étant un diviseur sur Q de type (2,1) , il est de self-intersection $C^2 = 4$ et par conséquent,puisque C n'est autre que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ plongé dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ par $O_{\mathbb{P}^1}(3)$, $N_{C/Q}$ est un faisceau inversible sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de degré 4 , donc :

$$N_{C/Q} = O_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(4)$$

et comme $N_{Q/\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}} = O_C(2)$, on a aussi : $N_{Q/\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}}|C = O_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(6)$.

Ainsi , $N_{C/\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}}$ peut être considéré comme un faisceau sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, obtenu comme une extension de $O_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(6)$ par $O_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(4)$.

De la suite exacte de cohomologie associée, on conclut que : d'une part , $H^1(C , N_{C/\mathbb{P}^3}) = 0$, et par conséquent que U est lisse au point C , et d'autre part que $H^0(C , N_{C/\mathbb{P}^3}) = 12$, d'où que la dimension de U est 12 .

1.2. Toute cubique non plane du type "conique lisse + droite" , "trois droites" , "droite double + droite" , "droite triple" , de genre 0 , est spécialisation de cubiques gauches lisses . En effet , une telle cubique gauche lisse est obtenue comme intersection résiduelle de deux quadriques lisses ayant une droite commune d . Faisant dégénérer une de ces quadriques dans une famille de quadriques contenant d , on remarque que les cubiques gauches se spécialisent en une cubique du type "conique lisse + d" . Les courbes des autres types ci-dessus sont obtenues en faisant encore dégénérer la conique lisse .

De même , les cubiques C telles que la courbe associée C' soit plane à point double ordinaire ou à "cusp" , munies d'un point immergé simplement "hors du plan" , situé sur la singularité de C' , sont obtenues comme spécialisation de cubiques gauches lisses par projection à partir d'un ppoint de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ (cf.[H]) . En faisant encore dégénérer C' , on obtient toutes les cubiques à point immergé "hors du plan" , ce point étant situé en un point singulier de C' .

En conclusion , toutes ces courbes sont dans l'adhérence de U , notée H_{12} .

II.2. La composante H_{15} :

De la même façon , on constate que l'ensemble des "cubiques planes lisses plus un point extérieur au plan" est un ouvert lisse , V , de $H_{3,0}$. En effet , soit C une telle courbe , C' désignant toujours la courbe associée et P le point , alors :

$$N_{C/\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}} = N_{C'/\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}} \oplus N_{P/\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}} .$$

Or , $N_{P/\mathbb{P}^3}$ est concentré en P et est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 , d'où , on a : $h^0(C,N_{P/\mathbb{P}^3}) = 3$ et $h^1(C,N_{P/\mathbb{P}^3}) = 0$; d'où ,l'on déduit que la dimension , $h^0(C,N_{C/\mathbb{P}^3})$, de $H^0(C,N_{C/\mathbb{P}^3})$ est 15 et que $H^1(C,N_{C/\mathbb{P}^3}) = 0$. On conclut alors de la même manière que ci-dessus : V est lisse en C et de dimension 15 .

Les spécialisations de telles courbes sont obtenues en faisant "bouger le point" et/ou dégénérer C' ; par conséquent , toutes les courbes du type "cubique plane plus un point (immergé simplement sur la cubique ou non)" sont spécialisations de courbes de V ; nous noterons H_{15} l'adhérence de V .

II.3. Conclusion provisoire :

Dans les deux paragraphes précédents , on s'est aperçu que toute courbe de degré 3 et de genre 0 est ou dans H_{12} , ou dans H_{15} ; par conséquent $H_{3,0}$ est réunion de ces deux ensembles . Comme d'autre part , une droite triple du type "droite triple plane à point immergé hors du plan" est à la fois dans H_{12} et H_{15} , cela montre que $H_{3,0}$ est connexe par arcs , donc connexe .

De plus , on a montré que toute courbe de $H_{3,0}$ se spécialise en un des types suivants :

- "droite triple définie par le carré de l'idéal d'une droite" ;
- "droite triple plane à point immergé hors du plan" ;
- "droite triple plane à point immergé globalement plane" .

Ces courbes appartenant respectivement à H_{12} , $H_{12} \cap H_{15}$, H_{15} .

Remarquons aussi dès à présent que ces trois types de courbes sont des points "ultimes" du schéma de Hilbert , bien que cela résulte , pour partie de la suite (cf. § III) . En effet :

- une courbe du premier type ne peut se spécialiser ni en une courbe du deuxième , ni en une courbe du troisième type , parce que la dimension locale de plongement ne peut que croître dans une spécialisation ;
- une courbe du deuxième type ne peut non plus se spécialiser en une courbe du troisième type pour la même raison . Si , d'un autre côté , elle se spécialisait en une courbe du premier type , cette dernière appartiendrait à l'intersection de H_{12} et de H_{15} , or nous allons montrer dans III que $H_{3,0}$ est lisse en un tel point : c'est donc impossible ;
- une courbe du troisième type enfin ne peut se spécialiser , pour des raisons de semi-continuité , qu'en une courbe plane . En effet , si $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ est une famille plate de courbes de base Y , dont la courbe générique est du troisième type et si I est le faisceau d'idéaux de $O_{\mathbb{P}^3_Y}$ définissant X , on a : $h(y) = h^0(X_y , I_y(1)) = 1$, pour tout $y \neq y_0$, d'où $h(y_0) \geqslant 1$. Par conséquent , une telle courbe ne peut se spécialiser en une courbe du premier , ni du deuxième type .

Enfin , comme toute courbe est soit dans l'adhérence de U , soit dans l'adhérence de V , $H_{3,0}$ a <u>deux composantes irréductibles</u> au maximum ; il y en a exactement deux , puisque H_{12} et H_{15} sont d'inégales dimensions et que $H_{12} \not\subset H_{15}$.

II.4. <u>L'intersection de H_{12} et de H_{15}</u> :

Une courbe de l'intersection doit être à la fois spécialisation de cubiques gauches lisses et de courbes du type "cubique plane + point" .

Remarquons tout d'abord qu'une cubique connexe sans point immergé , C , ne peut être spécialisation d'une "cubique plane + point" (que celui-ci soit immergé ou non) : en effet , pour une telle cubique C , on a $h^0(C , O_C) = 1$, donc < 2 . A nouveau , des raisons de semi-continuité imposent alors que pour toute générisation C' de C , $h^0(C' , O_{C'}) < 2$. Or , si Γ est une "cubique plane +point" , $h^0(\Gamma , O_\Gamma) = 2$.

Inversement , puisqu'une cubique non connexe ne peut être spécialisation d'une cubique connexe , les seules courbes de H_{15} qui peuvent être dans H_{12} , sont celles où le "point supplémentaire" est immergé . De plus , ce point ne peut être situé en un point lisse de C' ; si tel était le cas , la situation locale au voisinage de ce point serait celle d'une droite avec un point immergé , c'est-à-dire du type : Spec(A) où $A = \mathbb{C}[x,y]/(x^2,xy)$. Or , dans ce cas ,l'espace des déformations infinitésimales $T^1(A)$ est de dimension 1 et "éloigner le point" constitue une déformation non triviale , c'est donc la seule . Par conséquent , les seules déformations d'une "cubique plane + point immergé situé en un point lisse" consistent donc à "éloigner le point" : une telle courbe n'est donc pas dans H_{12} .

Enfin , si la courbe munie de son point immergé est "localement plane" (i.e. a pour dimension locale de plongement 2 au maximum) elle ne peut être spécialisation d'une cubique gauche lisse : nous verrons dans la dernière partie de IV , que toute déformation affine au-dessus d'un anneau A d'une courbe de ce type est de la forme $A[x,y]/(xg,yg)$; autrement dit , une telle courbe ne peut se "lissifier" par déformation , c'est-à-dire : aucune déformation ne peut en être lisse et connexe .

Comme par ailleurs , toute courbe du type "cubique plane singulière + point immergé ,situé en un point singulier de la courbe associée et dirigé hors du plan" , donc définie par un idéal du type $I = (T^2 , TX , TY , f)$, est d'après II.2 et II.3 dans H_{12} et H_{15} , cette intersection est précisément constituée des courbes de ce type .

Cette intersection est de dimension 11 : une telle courbe est , en effet , entièrement déterminée par la donnée d'un plan (3 paramètres) et d'une cubique singulière dans ce plan (8 paramètres) .

III). POINTS SINGULIERS ET POINTS REGULIERS DE $H_{3,0}$:

Remarquons d'emblée que deux cubiques d'un même type se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$: par conséquent , leurs espaces de déformations plongées (dans $\mathbb{P}^3$) sont isomorphes . Autrement dit , pour déterminer la nature de tous les points de $H_{3,0}$ correspondants à des courbes d'un type donné , il suffira de déterminer la nature de l'un d'entre eux seulement .

III.1. Espace tangent en une "droite triple déterminée par le carré de l'idéal d'une droite" :

Désignons par $\underline{I}$ le faisceau d'idéaux définissant la courbe C et appliquons la théorie générale du schéma de Hilbert , à savoir : l'espace tangent en C à $H_{3,0}$ est donné par (cf. [I]) :

$$T_C(H_{3,0}) = H^0(C , (\underline{I}/\underline{I}^2)^\vee) = H^0(C , \mathcal{H}om_{O_C}(\underline{I} , O_C)) .$$

Ce qui se traduit en termes de coordonnées homogènes et d'équations de la manière suivante : soit $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[T,X,Y,Z])$ et soit (T,X) les équations de la droite sous-jacente à C ; alors C peut être définie par l'idéal homogène $I_C = (T^2 , TX , X^2)$ et $\underline{I} = I_C$.

D'où une résolution de $\underline{I}$:

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}(-3)^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} X & 0 \\ -T & X \\ 0 & -T \end{pmatrix}} O_{\mathbb{P}^3}(-2)^3 \xrightarrow{(T^2,TX,X^2)} \underline{I} \longrightarrow 0$$

dont l'image par le foncteur $\underline{Hom}_{O_C}(.,O_C)$ donne la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}_{O_C}(\underline{I} , O_C) \longrightarrow O_C(2)^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} X & -T & 0 \\ 0 & X & -T \end{pmatrix}} O_C(3)^2$$

et , en prenant les sections globales :

$$0 \longrightarrow H^0(C , (\underline{I}/\underline{I}^2)^\vee) \longrightarrow H^0(C, O_C(2))^3 \xrightarrow{\varphi} H^0(C , O_C(3))^2 .$$

Comme l'application : $H^0(\mathbb{P}^3 , O_{\mathbb{P}^3}(2)) \longrightarrow H^0(C , O_C(2))$ est surjective (cf. I.3), tout élément de $H^0(C , O_C(2))$ est la restriction à C d'un polynôme homogène de degré 2 en T,X,Y,Z .

Le noyau de φ peut alors s'écrire comme l'ensemble des triplets (F,G,H) , où F,G,H sont des éléments de $H^0(C,O_C(2))$, qui peuvent donc s'écrire :

$F = a_1TY + a_2TZ + a_3XY + a_4XZ + a_5Y^2 + a_6YZ + a_7Z^2$, $G = b_1TY + \dots$, $H = c_1TY + \dots$,

tels que : $\varphi((F,G,H)) = 0$; autrement dit F,G,H tels que :

$$\begin{pmatrix} X & -T & 0 \\ 0 & X & -T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} XF = TG \\ XG = TH \end{cases}$$

Ce qui se traduit par les conditions suivantes : $a_5 = a_6 = a_7 = b_5 = b_6 = b_7 = 0$ et $c_5 = c_6 = c_7 = 0$.

D'où la conclusion : $h^0(C , (\underline{I}/\underline{I}^2)^\vee) = 12$,et , par voie de conséquence , un tel point est lisse et n'appartient donc qu'à H_{12} .

III.2. Espace tangent en une "droite triple plane à point immergé hors du plan" :

2.1. Un vecteur du cône tangent en un point de $H_{3,0}$ est déterminé par un morphisme :

$$\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^{k+1}) \longrightarrow H_{3,0}$$, pour un k suffisemment grand .

Mais , tout tel morphisme correspond à la donnée d'une famille plate : $X_\epsilon \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^{k+1})}$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^{k+1}))$.

Posons $A = \mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^{k+1}$; alors X_ϵ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^3_A$. Il est alors défini par un faisceau d'idéaux $\underline{I}$, mais également par l'idéal homogène saturé de $A[T,X,Y,Z]$:

$$I = \bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(\mathbb{P}^3_A , \underline{I}(n))$$

autrement dit : $X_\epsilon = \mathrm{Proj}(A[T,X,Y,Z]/I)$.

Par ailleurs , X_ϵ est une déformation plate au-dessus de A de $X_o = X \times_{\mathrm{Spec}A} (A/\epsilon)$. Ce qui se traduit par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X_o = X \times_{\mathrm{Spec}A} (A/\epsilon) \arrow[r] \arrow[d] & X_\epsilon = \mathrm{Proj}(A[T,X,Y,Z]/I) \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}\mathbb{C} = \mathrm{Spec}(A/\epsilon) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A) .
\end{tikzcd}$$

2.2. Soit à présent une cubique C du type voulu et désignons toujours par un indice o tout ce qui est relatif à la fibre au-dessus de $\mathrm{Spec}(A/\epsilon)$: ainsi $C = X_o$ dans $\mathbb{P}^3_o$, définie par le faisceau d'idéaux $\underline{I}_o$, etc....

Montrons alors que :

$$\underline{\text{pour tout } n \geqslant 0} , \quad \underline{H^1(\mathbb{P}^3_o , \underline{I}_o(n)) = 0} .$$

En effet , désignant toujours par X'_o la cubique plane associée à X_o (cf. § I.) , et notant $\underline{I}_o$ et $\underline{I}'_o$ les faisceaux d'idéaux définissant , respectivement , X_o et X'_o dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, on a , pour tout $n \geqslant 0$, la suite exacte de $O_{\mathbb{P}^3}$-modules :

$$0 \longrightarrow \underline{I}_o(n) \longrightarrow \underline{I}'_o(n) \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

où K est toujours concentré au point immergé . D'où la suite exacte de cohomologie associée :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \underline{I}_o(n)) \xrightarrow{f} H^0(\mathbb{P}^3, \underline{I}'_o(n)) \xrightarrow{g} H^0(\mathbb{P}^3, K) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^3, \underline{I}_o(n)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^3, \underline{I}'_o(n)) \longrightarrow \quad ......$$

Montrons à présent que $H^1(\mathbb{P}^3, \underline{I}'_o(n)) = 0$. Pour cela , rappelons que X'_o est une cubique plane , autrement dit , contenue dans un hyperplan H de $\mathbb{P}^3$; d'où le diagramme commutatif de suites exactes de $O_{\mathbb{P}^3}$-modules :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \underline{I}'_o(n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X'_o}(n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_H(n-3) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_H(n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X'_o}(n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

D'où l'on tire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-1) \longrightarrow \underline{I}'_o(n) \longrightarrow \mathcal{O}_H(n-3) \longrightarrow 0$$

et par conséquent la suite exacte de cohomologie :

$$\ldots \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^3,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-1)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^3,\ \underline{I}'_o(n)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^3,\ \mathcal{O}_H(n-3)) \longrightarrow \ldots$$

La nullité des termes extrêmes induisant alors , comme annoncé , la nullité de $H^1(\mathbb{P}^3,\ \underline{I}'_o(n))$, pour tout $n \geqslant 0$.

Nous rappelant alors que X_o peut être définie par l'idéal homogène saturé $I_o = (T^2, TX, TY, X^3)$, ce qui signifie , en particulier , que:

$$(I_o)_n \ = \ H^o(\mathbb{P}^3,\ \underline{I}_o(n)) \ ,$$

et , constatant que l'élément homogène TZ^{n-1} appartient à $(I'_o)_n$ et n'appartient pas à $(I_o)_n$, nous en déduisons que l'application f de la suite exacte (✱) n'est pas bijective , et par conséquent que l'application g n'est pas l'application nulle (puisque $H^o(\mathbb{P}^3,\ K) = \mathbb{C}$) , autrement dit :

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 0\ ,\ H^1(\mathbb{P}^3,\ \underline{I}_o(n)) = 0}\ .$$

2.3. De la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_A}$-modules :

$$0 \longrightarrow \underline{I}(n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_A}(n) \longrightarrow \mathcal{O}_X(n) \longrightarrow 0\ ,\ \text{pour tout } n \geqslant 0\ ,$$

on déduit par tensorisation par A/ϵ , et grâce à la platitude de $\mathcal{O}_X(n)$, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underline{I}(n) \otimes_A (A/\epsilon) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3_o}(n) \longrightarrow O_{X_o}(n) \longrightarrow 0$$

d'où : $\underline{I}_o(n) = \underline{I}(n) \otimes_A (A/\epsilon)$.

Comme d'autre part , on a vu que $H^1(\mathbb{P}^3_o , \underline{I}_o(n)) = 0$, pour tout $n \geqslant 0$, on en déduit , par le théorème de changement de base ([M] , corollaire 3 , page 53) que l'application naturelle :

$$\pi_* \underline{I}(n) \otimes_A (A/\epsilon) \longrightarrow H^o(\mathbb{P}^3_o , \underline{I}_o(n))$$

est , pour tout $n \geqslant 0$, un isomorphisme , et que , toujours pour tout $n \geqslant 0$, $\pi_*\underline{I}(n)$ est un A-module libre ([H] , théorème 12.11 , pp. 290-291) .

Comme , de plus , $\pi_*\underline{I}(n) = H^o(\mathbb{P}^3_o , \underline{I}(n))^{\vee}$, on en déduit que , pour tout $n \geqslant 0$, l'application naturelle :

$$H^o(\mathbb{P}^3_A , \underline{I}(n)) \otimes_A (A/\epsilon) \longrightarrow H^o(\mathbb{P}^3_o , \underline{I}_o(n))$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels , et par conséquent , que l'application :

$$I/\epsilon I = \frac{\bigoplus_{n \geqslant 0} H^o(\mathbb{P}^3_A , \underline{I}(n))}{\epsilon \left[\bigoplus_{n \geqslant 0} H^o(\mathbb{P}^3_A , \underline{I}(n))\right]} \longrightarrow \bigoplus_{n \geqslant 0} H^o(\mathbb{P}^3_o , \underline{I}_o(n)) = I_c$$

est un isomorphisme gradué et que I est un A-module libre .

Sachant que I_o peut être engendré par T^2, TX, TY, X^3 , on en déduit , grâce au lemme de Nakayama , que I peut être engendré par des éléments de la forme:

$$T^2 + g_1(\epsilon) \quad , TX + g_2(\epsilon) \quad , TY + g_3(\epsilon) \quad , X^3 + g_4(\epsilon)$$

où g_1, g_2, g_3, g_4 sont des éléments homogènes de degré 2 en T,X,Y,Z pour $i = 1,2,3$ et 3 pour $i = 4$.

D'où une surjection de $A[T,X,Y,Z]$-modules gradués :

$$A[T,X,Y,Z]^4 \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

dont on notera R le noyau .

Tensorisant par A/ϵ , et tenant compte du fait que I est un A-module libre on déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow R/\epsilon R \longrightarrow \mathbb{C}[T,X,Y,Z]^4 \longrightarrow I_o \longrightarrow 0$$

et , par conséquent , $R/\epsilon R$ est isomorphe à R_o le module des relations liant les générateurs T^2,TX,TY,X^3 de I_o . Ce qui signifie , en fait , que "les relations se relèvent".

Remarque : On a ainsi montré que X est non seulement plat , mais projectivement plat sur A . Autrement dit , l'anneau $A[T,X,Y,Z]/I$ est une déformation plate de $\mathbb{C}[T,X,Y,Z]/I_o$ au-dessus de A .

2.4. Les calculs : Notons f_1,f_2,f_3,f_4 les générateurs T^2,TX,TY,X^3 et écrivons , pour $i = 1,2,3,4$, $g_i(\epsilon)$ sous la forme :

$$g_i(\epsilon) = \epsilon g_i + \epsilon^2 h_i \ .$$

D'après ce qui précède , I sera alors engendré par les éléments :

$$F_i = f_i + \epsilon g_i + \epsilon^2 h_i$$

et , comme les relations liant f_1,f_2,f_3,f_4 sont :

$$\begin{cases} Tf_2 = Xf_1 \\ Tf_3 = Yf_1 \\ Xf_3 = Yf_2 \\ Tf_4 = X^2 f_4 \end{cases}$$

on pourra les relever en :

$$\begin{cases} (-X + \epsilon Q_1^1 + \epsilon^2 R_1^1)F_1 + (T + \epsilon Q_2^1 + \epsilon^2 R_2^1)F_2 + (\epsilon Q_3^1 + \epsilon^2 R_3^1)F_3 + (\epsilon Q_4^1 + \epsilon^2 R_4^1)F_4 = 0 \\ (-Y + \epsilon Q_1^2 + \epsilon^2 R_1^2)F_1 + (\epsilon Q_2^2 + \epsilon^2 R_2^2)F + (T + \epsilon Q_3^2 + \epsilon^2 R_3^2)F_3 + (\epsilon Q_4^2 + \epsilon^2 R_4^2)F_4 = 0 \\ (\epsilon Q_1^3 + \epsilon^2 R_1^3)F_1 + (Y + \epsilon Q_2^3 + \epsilon^2 R_2^3)F_2 + (-X + \epsilon Q_3^3 + \epsilon^2 R_3^3)F_3 + (\epsilon Q_4^3 + \epsilon^2 R_4^3)F_4 = 0 \\ (\epsilon Q_1^4 + \epsilon^2 R_1^4)F_1 + (-X^2 + \epsilon Q_2^4 + \epsilon^2 R_2^4)F_2 + (\epsilon Q_3^4 + \epsilon^2 R_3^4)F_3 + (T + \epsilon Q_4^4 + \epsilon^2 R_4^4)F_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Ce qui se traduit par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -Xg_1 + Tg_2 + \sum_{i=1}^{4} Q_i^1 f_i = 0 \\ -Yg_1 + Tg_3 + \sum_{i=1}^{4} Q_i^2 f_i = 0 \\ -Xg_3 + Yg_2 + \sum_{i=1}^{4} Q_i^3 f_i = 0 \\ -X^2 g_2 + Tg_4 + \sum_{i=1}^{4} Q_i^4 f_i = 0 \end{cases}$$

pour les coefficients de ϵ , avec $d^\circ Q_i^j \leqslant 1$, pour $j = 1,2,3$, $d^\circ Q_i^4 \leqslant 2$, $i = 1,2,3$, et $d^\circ Q_4^j \leqslant 0$, pour $j = 1,2,3$, $d^\circ Q_4^4 \leqslant 1$. Ce qui compte tenu des remarques faites en 2.1 , correspond à l'espace tangent à $H_{3,0}$ en X_o .

Les coefficients de ϵ^2 , qui eux déterminent l'ensemble des vecteurs de l'espace tangent en C induits par un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^3) \longrightarrow H_{3,0}$,et qu'on appellera abusivement "cône tangent d'ordre deux" , vérifient les conditions (modulo I_o) :

$$-Xh_1 + Th_2 + \sum_{i=1}^{4} Q_i^1 g_i = 0$$

$$-Yh_1 + Th_3 + \sum_{i=1}^{4} Q_i^2 g_i = 0$$

$$-Xh_3 + Yh_2 + \sum_{i=1}^{4} Q_i^3 g_i = 0$$

$$-X^2 h_2 + Th_4 + \sum_{i=1}^{4} Q_i^4 g_i = 0$$

Toutes ces conditions se traduisent par :

o <u>Première relation</u> : (faisant Z = 1 , pour alléger tant soit peu l'écriture)
$T(\alpha_2 + \beta_2 T + \gamma_2 X + \delta_2 Y + \eta_2 X^2 + \theta_2 XY + \kappa_2 Y^2) + (a_1^1 + b_1^1 T + c_1^1 X + d_1^1 Y)T^2 + (a_2^1 + b_2^1 T + c_2^1 X + d_2^1 Y)TX + (a_3^1 + b_3^1 T + c_3^1 X + d_3^1 Y)TY + a_4^1 X^3 = X(\alpha_1 + \beta_1 T + \gamma_1 X + \delta_1 Y + \eta_1 X^2 + \theta_1 XY + \kappa_1 Y^2)$

Avec des notations évidentes .

En identifiant , on obtient alors :

-- pour g_1 , $\alpha_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \theta_1 = \kappa_1 = 0$;

-- pour g_2 , $\alpha_2 = 0$;

-- pour Q_1^1 , $a_1^1 = -\beta_2$ et $b_1^1 = 0$;

-- pour Q_2^1 , $a_2^1 = \beta_1 - \gamma_2$; $b_2^1 = -c_1^1$; $c_2^1 = -\eta_2$;

-- pour Q_3^1 , $a_3^1 = -\delta_2$; $b_3^1 = -d_1^1$; $c_3^1 = -\theta_2 - d_2^1$; $d_3^1 = -\kappa_2$;

-- pour Q_4^1 , $a_4^1 = 0$.

o <u>Deuxième relation</u> : utilisant les résultats de la première , elle se réduit à :

$$T(\alpha_3 + \beta_3 T + \gamma_3 X + \delta_3 Y + \eta_3 X^2 + \theta_3 XY + \kappa_3 Y^2) + \sum_{i=1}^{4} Q_i^2 f_i = Y(\beta_1 + \eta_1 X^2)$$

et , par identification , on obtient :

$\eta_1 = 0$; $\alpha_3 = 0$; $a_1^2 = -\beta_3$; $b_1^2 = 0$; $a_2^2 = -\gamma_3$; $b_2^2 = -c_1^2$; $c_2^2 = -\eta_3$;
$a_3^2 = \beta_1 - \delta_3$; $b_3^2 = -d_1^2$; $c_3^2 = -\theta_3 - d_2^2$; $d_3^2 = -\kappa_3$; $a_4^2 = 0$.

o <u>Troisième relation</u> : utilisant toujours ce qui précède , on obtient :
$Y(\beta_2 + \gamma_2 X + \delta_2 Y + \eta_2 X^2 + \theta_2 XY + \kappa_2 Y^2) + \sum_{i=1}^{4} Q_i^3 f_i = X(\beta_3 T + \gamma_3 X + \delta_3 Y + \eta_3 X^2 + \theta_3 XY + \kappa_3 Y^2)$, d'où , l'on tire :

$\delta_2 = 0$; $\kappa_2 = 0$; $\gamma_3 = 0$; $\delta_3 = \gamma_2$; $\theta_3 = \eta_2$; $\kappa_3 = \theta_2$; $a_1^3 = 0$; $b_1^3 = 0$; $a_2^3 = \beta_3$; $b_2^3 = -c_1^3$; $c_2^3 = 0$; $a_3^3 = -\beta_2$; $b_3^3 = -d_1^3$; $c_3^3 = -d_2^3$; $d_3^3 = 0$; $a_4^3 = \eta_3$.

o <u>Quatrième relation</u> : compte tenu des précédentes , celle-ci s'écrit :

$$T(\alpha_4 + \beta_4 T + \gamma_4 X + \delta_4 Y + \eta_4 X^2 + \theta_4 XY + \kappa_4 Y^2 + \lambda_4 X^2 Y + \mu_4 XY^2 + \nu_4 Y^3) + \sum_{i=1}^{4} Q_i^4 f_i = X^2(\beta_2 T + \gamma_2 X + \eta_2 X^2 + \theta_2 XY)$$

ce qui donne :

$\alpha_4 = 0$ et $Q_3^4 = -\delta_4 - d_1^4 T - (\theta_4 + d_2^4)X - \kappa_4 Y - (\lambda_4 + f_2^4)X^2 - (\mu_4 + g_2^4)XY - \nu_4 Y^2$ et
$Q_4^4 = \gamma_2 - e_2^4 T + \eta_2 X + \theta_2 Y + e_4^4 X^2 + f_4^4 XY + g_4^4 Y^2$.

<u>En conclusion</u> : De ces quatres premières relations , on déduit que :

$$g_1 = \beta_1 T$$
$$g_2 = \beta_2 T + \gamma_2 X + \eta_2 X^2 + \theta_2 XY$$
$$g_3 = \beta_3 T + \gamma_2 Y + \eta_3 X^2 + \eta_2 XY + \theta_2 Y^2$$
$$g_4 = \beta_4 T + \gamma_4 X + \delta_4 Y + \eta_4 X^2 + \theta_4 XY + \kappa_4 Y^2 + \lambda_4 X^2 Y + \mu_4 XY^2 + \nu_4 Y^3 .$$

Et , par conséquent , puisque g_1, g_2, g_3, g_4 dépendent de 16 coefficients linéairement indépendants , l'espace tangent à $H_{3,0}$ au point considéré est de dimension 16 .

Comme dit précédemment , les quatres autres relations déterminent le "cône tangent d'ordre deux" . De manière plus précise , la cinquième s'écrit :

$$T(\alpha_2' + \beta_2' T + \gamma_2' X + \delta_2' Y + \eta_2' X^2 + \theta_2' XY + \kappa_2' Y^2) + (-\beta_2 + c_1^1 X + d_1^1 Y)\beta_1 T + (\beta_1 - \gamma_2 - c_1^1 T - \eta_2 X + d_2^1 Y)(\beta_2 T + \gamma_2 X + \eta_2 X^2 + \theta_2 XY) + (-d_1^1 T - (\theta_2 + d_2^1)X)(\beta_3 T + \gamma_2 Y + \eta_3 X^2 + \eta_2 XY + \theta_2 Y^2) = X(\alpha_1' + \beta_1' T + \gamma_1' X + \delta_1' Y + \eta_1' X^2 + \theta_1' XY + \kappa_1' Y^2)$$

(les "primes" désignant les coefficients des h_i) . Mais cette relation se simplifie considérablement si nous la regardons modulo I_o . Elle devient en fait :

$$\alpha_2'T - \beta_2\beta_1 T + (\beta_1 - \gamma_2)(\beta_2 T + \gamma_2 X + \eta_2 X^2 + \theta_2 XY) + (-\eta_2 X + d_2^1 Y)(\gamma_2 X + \eta_2 X^2$$
$$+ \theta_2 XY) - (\theta_2 + d_2^1)X(\gamma_2 Y + \eta_2 XY + \theta_2 Y^2) = X(\alpha_1' + \gamma_1' X + \delta_1' Y + \theta_1' XY + \kappa_1' Y^2) .$$

Ce qui nous permet d'écrire finalement les relations suivantes :

$$\alpha_1' = (\beta_1 - \gamma_2)\gamma_2 \qquad \theta_1' = -2\eta_2\theta_2$$
$$\gamma_1' = (\beta_1 - 2\gamma_2)\eta_2 \qquad \kappa_1' = -\theta_2^2$$
$$\delta_1' = (\beta_1 - 2\gamma_2)\theta_2 \qquad \alpha_2' = \beta_2\gamma_2 .$$

De la sixième relation , on tire en plus :

$$\alpha_3' = \beta_3\gamma_2 \qquad \text{et} \qquad \eta_3(\beta_1 - 2\gamma_2) = 0 .$$

De la septième :

$$\eta_3\beta_4 = 0 \qquad \gamma_3' = \beta_3\eta_2 - \beta_2\eta_3 + \eta_3\eta_4$$
$$\alpha_2' = \beta_2\gamma_2 - \eta_3\delta_4 \qquad \delta_3' = \gamma_2' + \beta_3\theta_2 - \beta_2\eta_2 + \eta_3\theta_4$$
$$\delta_2' = \beta_2\theta_2 - \eta_3\kappa_4 \qquad \theta_3' = \eta_2' + \eta_3\lambda_4$$
$$\alpha_3' = \beta_3\gamma_2 + \eta_3\gamma_4 \qquad \kappa_3' = \theta_2' + \eta_3\mu_4 .$$

De la huitième , enfin , on ne tire que des égalités exprimant les coefficients de h_4 en fonction des autres données ; ce qui n'impose aucune condition supplémentaire à la prolongation des déformations à l'ordre 2 .

<u>En conclusion</u> , on trouve les conditions suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_3(\beta_1 - 2\gamma_2) &= 0 \\ \eta_3\beta_4 &= 0 \\ \eta_3\gamma_4 &= 0 \\ \eta_3\delta_4 &= 0 \end{aligned}}$$

Par conséquent , le "cône tangent d'ordre deux" est constitué de deux sous-espaces linéaires de dimensions respectives 15 , d'équation $\eta_3 = 0$, et 12 , d'équations $\beta_1 = 2\gamma_2$ et $\beta_4 = \gamma_4 = \delta_4 = 0$.

Par suite , pour des raisons évidentes de dimensions , le cône tangent , qui , a priori , est contenu dans celui à l'ordre deux lui est égal . D'où l'on conclut : <u>H_{12} et H_{15} sont lisses et se coupent transversalement en un point de leur intersection</u> .

III.3. Espace tangent en une "droite triple plane à point immergé dans le plan" plane :

La méthode utilisée dans ce cas est la même que celle du paragraphe III.1. A savoir, calculer $H^0(C, \underline{Hom}_{O_C}(\underline{I}/\underline{I}^2, O_C))$ à l'aide d'une résolution de $\underline{I}$.

Comme on l'a vu, C peut être définie par les équations $T=0$, $X^3Y=0$, $X^4=0$, une résolution de $\underline{I}$ est donc donnée par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}(-5) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ X \\ -Y \end{pmatrix}} O_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-4)^2 \xrightarrow{(T, X^3Y, X^4)} \underline{I} \longrightarrow 0$$

qui, après application des foncteurs $\underline{Hom}_{O_C}(., O_C)$ et $H^0(C,.)$, donne la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(C, (\underline{I}/\underline{I}^2)^{\vee}) \longrightarrow H^0(C, O_C(1)) \oplus H^0(C, O_C(4))^2 \xrightarrow[\varphi]{(0,X,-Y)} H^0(C, O_C(5))$$

Reprenant les notations du paragraphe précédent, où l'on désignait par X_o la courbe C considérée et X'_o la courbe associée, rappelons la suite exacte (✻) :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \underline{I}_o(n)) \xrightarrow{f} H^0(\mathbb{P}^3, \underline{I}'_o(n)) \xrightarrow{g} \mathbb{C} \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^3, \underline{I}_o(n)) \longrightarrow 0 .$$

Mais cette fois : -pour n = 1 : f est bijective, et par conséquent, $g = 0$ et $h^1(\mathbb{P}^3, \underline{I}_o(n)) = 1$;

-pour n = 4 : l'élément X^3Z appartient à $H^0(\mathbb{P}^3, \underline{I}'_o(4))$ mais pas à $H^0(\mathbb{P}^3, \underline{I}_o(4))$; f n'est donc pas bijective et $H^1(\mathbb{P}^3, \underline{I}_o(4)) = 0$.

La suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de $O_{\mathbb{P}^3}$-modules

$$0 \longrightarrow \underline{I}_o(n) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}(n) \longrightarrow O_{X_o}(n) \longrightarrow 0 \text{, pour tout } n \text{,}$$

donne alors ("$C = X_o$") :

- pour n = 1 : $h^0(C, O_C(1)) = 4$;
- pour n = 4 : l'application de restriction $H^0(\mathbb{P}^3, O_{\mathbb{P}^3}(4)) \longrightarrow H^0(C, O_C(4))$ est surjective.

Le noyau de l'application φ est somme directe de $H^0(C, O_C(1))$ et de l'ensemble $\{(F,G) \mid F,G \in H^0(\mathbb{P}^3, O_{\mathbb{P}^3}(4))_{|C}$ et tels que $XF = YG\}$.

Un tel F (respectivement G) s'écrivant alors :

$F = a_1X^3Z + a_2X^2Y^2 + a_3X^2YZ + a_4X^2Z^2 + a_5XY^3 + a_6XY^2Z + a_7XYZ^2 + a_8XZ^3 + a_9Y^4$
$+ a_{10}Y^3Z + a_{11}Y^2Z^2 + a_{12}YZ^3 + a_{13}Z^4$, (respectivement: $G = b_1X^3Z + \ldots.$),

la relation $XF = YG$ impose alors : $a_4 = a_8 = a_{13} = b_9 = b_{10} = b_{11} = b_{12} = b_{13} = 0$ et les égalités : $a_5 = b_2$, $a_6 = b_3$, $a_7 = b_4$, $a_9 = b_5$, $a_{10} = b_6$, $a_{11} = b_7$, $a_{12} = b_8$. Cet espace est donc de dimension 11.

Conclusion : la dimension de Ker(φ) est 15 ; ce noyau étant précisément $T_C(H_{3,0})$ au point C considéré , on en déduit que C n'appartient qu'à H_{15} et que cette composante est lisse en un tel point .

III.4. Conclusion :

Nous avons vu que :

--- H_{12} est lisse en des points du type "droite triple déterminée par le carré de l'idéal d'une droite" ;

--- H_{15} est lisse en une courbe du type "droite triple à point immergé" plane ;

--- le cône tangent à $H_{3,0}$ en un point du type "droite triple à point immergé hors du plan" est constitué de deux sous-espaces linéaires de dimension 12 et 15 , transverses , donc que , à la fois , H_{12} et H_{15} sont lisses en de tels points .

Par conséquent : comme toute courbe de $H_{3,0}$ est au voisinage d'une courbe d'un trois types ci-dessus , et grâce à la remarque faite en début du III , on en déduit que H_{12} et H_{15} sont lisses .

D'où la conclusion : $H_{3,0}$ est constitué de deux composantes irréductibles H_{12} de dimension 12 et H_{15} de dimension 15 , toutes deux lisses et se coupant transversalement suivant un sous-schéma de dimension 11 .

IV). UNE CARACTERISATION DE LA COMPOSANTE H_{15} :

IV.1. Quelques remarques simples :

Tout d'abord , remarquons que le schéma de Hilbert des cubiques planes de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ est lisse , de dimension 12 : une courbe de H est , en effet , déterminée par un plan et une cubique dans ce plan ; autrement dit , H est fibré en $\mathbb{P}^9$ sur $(\mathbb{P}^3)^*$.

Dans le même ordre d'idée , considérant le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^3 & \mathscr{C} \subset H \times \mathbb{P}^3 \arrow[l, "pr_2"'] \arrow[d, "pr_1"] \\ & H \end{tikzcd}$$

où $\mathscr{C} = \{(C,x) \mid x \in C\}$, on constate que $\mathscr{C}$ est fibré sur $\mathbb{P}^3$, une fibre étant constituée par l'ensemble des cubiques planes qui passent par un point donné de $\mathbb{P}^3$.

Or cet ensemble est le produit fibré de l'ensemble des cubiques planes passant par un point de $\mathbb{P}^2$ (qui est un hyperplan de $\mathbb{P}^9$) par l'ensemble des plans de $\mathbb{P}^3$ passant par un point donné (qui est un hyperplan de $(\mathbb{P}^3)^*$) . Par conséquent , $\mathscr{C}$ est fibré en $\mathbb{P}^8$ sur $\mathbb{P}^2$, donc lisse .

En conclusion , si $\underline{I}$ désigne le faisceau d'idéaux de $O_{H\times\mathbb{P}^3}$ définissant $\mathcal{C}$, alors , l'éclaté de $H\times\mathbb{P}^3$ le long de la sous-variété lisse $\mathcal{C}$ de codimension 2 , à savoir $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geqslant 0} \underline{I}^n) = \mathrm{Proj}(S(\underline{I})) = \mathbb{P}(\underline{I})$, est lisse de dimension 15 .

IV.2. Un morphisme de $\mathbb{P}(\underline{I})$ vers H_{15} :

Nous allons à présent exhiber un morphisme de $\mathbb{P}(\underline{I})$ vers H_{15} ; pour cela , construisons sur $\mathbb{P}(\underline{I})$ une famille plate de courbes du type "cubique plane + point" .

Considérons les morphismes suivants : $\pi : \mathbb{P}(\underline{I}) \longrightarrow H\times\mathbb{P}^3$, le morphisme structural , pr_1 , $pr_2 : H\times\mathbb{P}^3 \longrightarrow H$, $\mathbb{P}^3$, respectivement , et $\pi_i = pr_i\circ\pi$; et utilisons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\underline{I}) \arrow[r, "(1{,}\pi_2)"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}(\underline{I}) \times \mathbb{P}^3 \arrow[d, "(\pi_1{,}1)"] \\ & H \times \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

Soit $\underline{L} = \pi^*\underline{I} = O_{\mathbb{P}(\underline{I})}(1)$ le faisceau inversible naturel sur $\mathbb{P}(\underline{I})$. Il existe un morphisme naturel de $O_{\mathbb{P}(\underline{I})\times\mathbb{P}^3}$-modules :

$$(\pi_1,1)^*\underline{I} \longrightarrow (1,\pi_2)_*(1,\pi_2)^*(\pi_1,1)^*\underline{I} = (1,\pi_2)_*\underline{L}$$

qui , comme $(1,\pi_2)$ est un plongement , est surjectif .

Soit alors $\underline{J}$ le noyau de ce morphisme ; sachant que π_1 est un morphisme plat (cf. par exemple [A-K] , proposition 3.5 , page 94) , donc $(\pi_1,1)$ également , $(\pi_1,1)^*\underline{I}$ est un faisceau d'idéaux sur $\mathbb{P}(\underline{I})\times\mathbb{P}^3$, donc aussi $\underline{J}$. Appelons X la famille que détermine $\underline{J}$ au-dessus de $\mathbb{P}(\underline{I})$ et X' , celle définie par $(\pi_1,1)^*\underline{I}$.

Montrons que la projection de $\mathbb{P}(\underline{I})\times\mathbb{P}^3$ sur $\mathbb{P}(\underline{I})$ fait de X un schéma plat sur $\mathbb{P}(\underline{I})$ et que les fibres de ce morphisme sont des courbes du type "cubique plane + point" .

En ce qui concerne la platitude , remarquons que $\underline{L}$ est localement libre , donc plat sur $\mathbb{P}(\underline{I})$, et par conséquent , $(1,\pi_2)_*\underline{L}$ l'est également . Comme , par ailleurs , $\mathcal{C}$ est la cubique universelle sur H , $\underline{I}$ est plat sur H , d'où $(\pi_1,1)^*\underline{I}$ est plat sur $\mathbb{P}(\underline{I})$. Le diagramme suivant permet alors de conclure :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d, dash] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \underline{K} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \underline{J} \arrow[r] \arrow[d] & O_{\mathbb{P}(\underline{I})\times\mathbb{P}^3} \arrow[r] & O_X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\pi_1,1)^*\underline{I} \arrow[r] \arrow[d] & O_{\mathbb{P}(\underline{I})\times\mathbb{P}^3} \arrow[r] \arrow[u, dash] \arrow[d] & O_{X'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & (1,\pi_2)_*\underline{L} \arrow[d] & 0 & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

d'où $\underline{K} = (1,\pi_2)_*\underline{L}$ est plat sur $\mathbb{P}(\underline{I})$, comme $O_{X'}$ l'est , on en déduit que O_X aussi.

En ce qui concerne les fibres , le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[r, "(1,u_2)"] \arrow[d, "v"'] & \operatorname{Spec} \mathbb{C} \times \mathbb{P}^3 \arrow[d, "(v,1)"] \\
\mathbb{P}(\underline{I}) \arrow[r, "(1,\pi_2)"'] & \mathbb{P}(\underline{I}) \times \mathbb{P}^3
\end{tikzcd}$$

où v est un morphisme de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}(\underline{I})$ et $u_2 = pr_2 \circ \pi \circ v$, montre que :

$$(v,1)^*(1,\pi_2)_*\underline{L} = (1,u_2)_*(v^*\underline{L}) .$$

Or $v^*\underline{L}$ est un faisceau inversible sur $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$, et par conséquent $(1,u_2)_*(v^*\underline{L})$ est concentré au point $v(\operatorname{spec}\mathbb{C})$ où il est isomorphe à $\mathbb{C}$; d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow O_{X_C} \longrightarrow O_{X'_C} \longrightarrow 0 .$$

Une fibre géométrique de X est donc une cubique de genre arithmétique 0 . <u>La propriété universelle des schémas de Hilbert nous assure alors l'existence d'un morphisme</u> :

$$f:\ \mathbb{P}(\underline{I}) \longrightarrow H_{3,0}$$

tel que l'image f(x) d'un point x est le point du schéma de Hilbert correspondant à la fibre $X_x \subset \mathbb{P}^3_{k(x)}$; et par conséquent , <u>l'image de f est contenue dans la composante H_{15}</u> .

Pour les mêmes raisons d'ailleurs , $f : \mathbb{P}(\underline{I}) \longrightarrow H_{15}$ est bijectif . De plus , H_{15} est lisse et par conséquent , <u>f est un isomorphisme de $\mathbb{P}(\underline{I})$ sur H_{15}</u> .

IV.3. <u>Expression explicite de f^{-1} au voisinage d'un point du type III.3</u> :

3.1. Calculons l'anneau local de la famille universelle $X \subset H_{15} \times \mathbb{P}^3$ au-dessus de H_{15} , en un point du type "cubique plane à point immergé dans le plan" .

Notons φ le morphisme de projection $X \longrightarrow H_{15}$ et $y = \varphi(x)$ l'image du point x de X . On remarque alors que $O_{X,x}$ est une déformation locale plate au-dessus de $O_{H_{15},y}$ de la fibre au point y .

Autrement dit , notant (A,m) l'anneau local $(O_{H_{15},y}\ , m_y)$, $O_{X,x}$ est une déformation locale de l'anneau $R = \mathbb{C}[X,Y]_{(X,Y)}/(Xf\ , Yf)$, où f désigne un polynôme de degré $\leqslant 3$.

Notons encore $B = \mathbb{C}[X,Y]_{(X,Y)}$, I l'idéal de B définissant R , et $f_1 = Xf$, $f_2 = Yf$.

Alors , si $\tilde{R}$ désigne une déformation de R au-dessus de A , $\tilde{R}$ est un quotient de $\tilde{B} = A[X,Y]_{(X,Y)}$ par un idéal que nous noterons $\tilde{I}$. La platitude de $\tilde{R}$ sur A se traduit alors par : «il existe $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ dans $\tilde{B}$ tels que $\tilde{I} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$, avec $\tilde{f}_i = f_i$, modulo m_A , et tels que "les relations se relèvent"».

La relation non triviale liant f_1 et f_2 , étant $Yf_1 = Xf_2$, il existe donc m_1 et m_2 dans $m_A B$ tels que :

$$\underline{(Y + m_1)\,\tilde{f}_1 = (X + m_2)\,\tilde{f}_2} \qquad (*)$$

Posons $u = X + m_2$, $v = Y + m_1$, on a alors : $u\tilde{f}_2 = v\tilde{f}_1$; complétons l'anneau $A[X,Y]_{(X,Y)}$ par rapport à l'idéal $M = m_A + (X,Y)$, nous obtenons ainsi : $\hat{A}[[X,Y]]$. Le théorème des fonctions implicites pour des séries formelles nous permet alors d'énoncer :

$$\underline{\hat{A}[[X,Y]] = \hat{A}[[u,v]]}\ .$$

On en déduit que (u,v) forme une suite régulière dans l'anneau local complété , donc une suite régulière dans $A[X,Y]_{(X,Y)}$, et , par conséquent , de la relation

(∗) $u\widetilde{f}_2 = v\widetilde{f}_1$, on déduit l'existence d'un élément $g \in A[X,Y]_{(X,Y)}$ tel que $\widetilde{f}_1 = ug$, $\widetilde{f}_2 = vg$. D'où la conclusion :

$$O_{X,x} \cong A[X,Y]_{(X,Y)} / (ug , vg)$$

et , comme les deux idéaux (X,Y) et (u,v) sont égaux (lemme de Nakayama) , on a :

$$\boxed{O_{X,x} \cong A[X,Y]_{(X,Y)} / (Xg , Yg) .}$$

<u>Remarque</u> : g peut s'écrire $g = f + h$, où $h \in m_A\widetilde{B}$ et on verra plus loin que le degré de h est $\leqslant 3$.

3.2. Gardant les notations précédentes , <u>construisons un morphisme de Spec(A) vers $\mathbb{P}(\underline{I})$</u> .

Pour ce faire , considérons le faisceau d'idéaux $\underline{L}$ sur $X = \varphi^{-1}(\mathrm{Spec}A)$, concentré en $(X=0$, $Y=0)$, défini par $(g)/(Xg,Yg)$ et la famille X' (au-dessus de SpecA) définie par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underline{L} \longrightarrow O_X \longrightarrow O_{X'} \longrightarrow 0$$

On fait alors les constatations suivantes :

- $\underline{L} \cong A$;
- le support du faisceau $\underline{L}$ est : $\mathrm{Spec}(A[X,Y]/(X,Y) \xhookrightarrow{\varphi_2} P^3_A$;
- X' est une famille de courbes dont la fibre spéciale est une cubique plane , et <u>cette famille est plate sur A</u> .

En effet , la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underline{L} \longrightarrow O_X \longrightarrow O_{X'} \longrightarrow 0$$

qui n'est autre que la suite :

$$0 \longrightarrow (g)/(Xg,Yg) \longrightarrow B/(Xg,Yg) \longrightarrow B/(g) \longrightarrow 0$$

donne , après tensorisation par A/m_A :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/mA,B/(g)) \longrightarrow \underset{\displaystyle (f)/(Xf,Yf)}{\underset{\|}{(g)/(Xg,Yg)\otimes A/mA}} \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y]/(Xf,Yf) \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y]/(f) \longrightarrow 0$$

d'où $\mathrm{Tor}_1^A(A/m_A, B/(Xg,Yg)) = 0$; et , par conséquent ,un critère local de platitude ([Ma] , théorème 49 ,page 146) nous assure la platitude de $B/(g)$ sur A .

Conclusion : <u>X' est une famille plate de cubiques planes</u> (en particulier , comme annoncé , on a $d^\circ h \leq 3$) et la propriété universelle de H nous assure alors l'existence d'un morphisme :

$$\varphi_1 : \mathrm{Spec}\ A \longrightarrow H .$$

Soit alors le morphisme ψ: Spec A $\longrightarrow H \times \mathbb{P}^3$ faisant commuter la diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\ A \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "{(1,\varphi_2)}"'] & & H \times \mathbb{P}^3 \\
& \mathrm{Spec}(A) \times \mathbb{P}^3 \arrow[ur, "{(\varphi_1,1)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Il reste à voir que ψ se relève à un morphisme de Spec(A) dans $\mathbb{P}(\underline{I})$.Si $\underline{I}_{X'}$ désigne alors le faisceau d'idéaux définissant X' dans $\mathbb{P}^3_A$, on a

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[r] & \underline{I}_X \arrow[r] \arrow[d] & \underline{I}_{X'} \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[r] & O_{\mathbb{P}^3_A} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & O_{\mathbb{P}^3_A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{L} \arrow[r] & O_X \arrow[r] \arrow[d] & O_{X'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

d'où , un morphisme surjectif : $\underline{I}_{X'} \longrightarrow \underline{L} \longrightarrow 0$

et , par conséquent : $\underline{I}_{X'} = (\varphi_1,1)^* \underline{I} \longrightarrow \underline{L} \longrightarrow 0$

qui induit par image réciproque par $(1,\varphi_2)$:

$$\psi^* \underline{I} \longrightarrow (1,\varphi_2)^* \underline{L} \longrightarrow 0 .$$

Mais , la propriété universelle qui caractérise $\mathbb{P}(\underline{I})$ nous assure alors que le morphisme ψ se factorise à travers $\mathbb{P}(\underline{I})$.

3.3. Désignons par $i: \mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow H_{15}$ le plongement naturel . Les deux morphismes i et f correspondent à la même famille au-dessus de $\mathrm{Spec}(A)$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} P(\underline{I}) \arrow[rr, "f"] & & H_{15} \\ & \mathrm{Spec}(A) \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif . Et , par conséquent , ψ est l'application réciproque de f au voisinage d'une courbe de type "droite triple à point immergé dans le plan" plane .

Remarque : On aurait pu utiliser cette dernière construction pour montrer la lissité de H_{15} , en l'absence du § III.3.

BIBLIOGRAPHIE :

[A-K] A.ALTMAN - S.KLEIMAN - Introduction to Grothendieck Duality Theory - Springer L.N. 146 - 1970 .

[G] A.GROTHENDIECK - Fondements de la géométrie algébrique - Séminaire Bourbaki 1957-1962 - Exposé 221 .

[H] R.HARTSHORNE - Algebraic Geometry - Springer 1977 .

[I] L.ILLUSIE - Complexe cotangent et déformations I - Springer L.N. 239 - 1971 .

[Ma] H.MATSUMURA - Commutative Algebra - W.A.Benjamin 1970 .

[M] D.MUMFORD - Abelian Varieties - Tata Institute - 1970 .

[P-S] R.PIENE - M.SCHLESSINGER - On the Hilbert scheme compactification of the space of twisted cubics - Preprint .

[S] D.SCHAUB - Sur l'homologie du schéma de Hilbert des cubiques de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ de genre 0 - (à paraître) .

UNIVERSITE D'ANGERS
Faculté des Sciences

Boulevard Lavoisier
49045 ANGERS CEDEX .