Jeudi 27 Novembre 2008 L. Menichi

Sullivan models

[FHT] Felix - Halperin - Thomas

[FOT] Felix - Oprea - Tanré

All my vector space are over $\mathbb{Q}$ or a fields of characteristic 0

I Graded differential algebra

A graded algebra is a graded vector space $A = \{A^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

equipped with a multiplication $\mu \; A^p \otimes A^q \longrightarrow A^{p+q}$

A is commutative if $ab = (-1)^{|a||b|} ba$ $|a|$ = degree of a

A differential graded algebra DGA is a graded algebra A equipped with a differential $d: A^n \longrightarrow A^{n+1}$ which is also a derivation

$$d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|} a \, db$$

A CDGA is a commutative DGA

Ex 1) Let (B, d_B) and (C, d_C) two CDGA

tensor $B \otimes C$ is a CDGA

$$(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = (-1)^{|c||b'|} bb' \otimes cc'$$

$$d(b \otimes c) = d_B b \otimes c + (-1)^{|b|} b \otimes d_C c$$

$B \otimes C$ is the sum (coproduct) of B and C in the category of commutative graded algebra

2) More generally, Let $f: (A, d_A) \longrightarrow (B, d_B)$

$g \; (A, d_A) \longrightarrow (C, d_C)$

two morphisms of CDGAs

$$B \underset{A}{\otimes} C = \frac{B \otimes C}{\mathbb{Q}\text{-sub vector spaces generated by the elements } b\,f(a) \otimes c - b \otimes g(a)\,c}$$ is a CDGA

push out in the category of CDGAs

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & B \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "G"] & \\
C \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "G"'] & B \underset{A}{\otimes} C \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \arrow[dr, dashed, "\exists!\ \text{morphism of CDGAs}"] & \\
& & D
\end{tikzcd}$$

3) Let V be a graded vector space.
— W —————.

$\Lambda V \overset{\text{def}}{=}$ free graded commutative algebra

If $v \in V^{\text{even}}$

$\Lambda v = \mathbb{Q}[v]$ polynomial algebra

If $v \in V^{\text{odd}}$

$\Lambda v =$ exterior algebra on v

$\Lambda(V \oplus W) \cong \Lambda V \otimes \Lambda V$ since Λ left adjoint preserves sums.

$\Lambda V =$ polynomial algebra on generators of even degree
$\otimes$ exterior algebra on generators of odd degree

Universal properties

1)

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\varphi", "\text{CDGA morphisms}"'] \arrow[drr, "b \mapsto b\otimes 1"'] & & C & & V \arrow[ll, "f"', "\text{linear}"] \arrow[dll, "v \mapsto 1_B \otimes v"] \\
& & B \otimes \Lambda V \arrow[u, dashed, "\exists!\ \text{morphism of CDGA}"'] & &
\end{tikzcd}$$

2) Let $d_B : B \longrightarrow B$ derivation of degree k
Let $d_V : V \longrightarrow B \otimes \Lambda V$ linear morphism of degree k

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "d_B"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \otimes \Lambda V \arrow[d, dashed, "\exists!\ \text{derivation } d"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[l] \arrow[dl, "d_V"] \\
B \arrow[r] & B \otimes \Lambda V &
\end{tikzcd}$$

3) Let $f: A = \Lambda V \longrightarrow B$ a morphism of graded algebras

d is a (f,f)-derivation
if $\forall\ a, b \in A$

$$d(ab) = da\, f(b) \pm f(a)\, da$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "d_V"] \arrow[d, hook] & B \\ \Lambda V \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$\exists !$ (f,f)-derivation d

Applications

Sullivan model of odd sphere S^{2n+1}

Consider the De Rham algebra of forms $A_{DR}(S^{2n+1})$ it is a CDGA

$$H^* A_{DR}(S^{2n+1}) = \Lambda[v]$$

where v is a cycle of $A_{DR}(S^{2n+1})$ $\quad |v| = 2n+1$

The inclusion of complexes

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}v, 0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A_{DR}(S^{2n+1}) \\
\Lambda v, 0 \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \text{morphisme } m \text{ of CDGAs}"'] &
\end{tikzcd}$$

$H(m)$ is a isomorphisme $\quad m : \Lambda v, 0 \xrightarrow{\simeq} A_{DR}(S^{2n+1})$

Sullivan model of even sphere S^{2n}

the same at the beginning. We construct a morphisme of CDGA $m_1 : \Lambda v, 0 \longrightarrow A_{DR}(S^{2n})$

But $H(m_1)$ is not an iso now:

$$H(m_1)(v) = [v] \Rightarrow H(m_1)(v^2) = [v^2] = [v]^2 = 0$$

Since $[v^2] = 0$ in $H(A_{DR}(S^{2n}))$, $\exists\, \psi \in A_{DR}(S^{2n})$ such that $d_{DR}\psi = v^2$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}v \oplus \mathbb{Q}w \arrow[r] \arrow[d, hook] & A_{DR}(S^{2n}) \\
\Lambda(v, w) \arrow[ur, dashed, "\exists!"']
\end{tikzcd}$$

$$v \longmapsto v \qquad w \longmapsto \psi$$

$\exists!$ morphism of commutative graded algebra

$$\begin{tikzcd}
d_V : V = \mathbb{Q}v \oplus \mathbb{Q}w \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Lambda v, w \\
\Lambda(v, w) \arrow[ur, dashed, "\exists!"']
\end{tikzcd}$$

$$v \longmapsto 0 \qquad w \longmapsto v^2$$

$\exists!$ unique derivation d

Since d is a derivation of odd degree, $d \circ d$ is again a derivation

$$v \longmapsto 0 \qquad w \overset{d_V}{\longmapsto} v^2 \overset{d}{\longmapsto} 0$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "d_V"] \arrow[d, hook] & \Lambda V \arrow[r, "d"] & \Lambda V \\
\Lambda V \arrow[ur, "d"] \arrow[urr, "d \circ d"']
\end{tikzcd}$$

Since $d \circ d$ vanishes on V,

by unicity $d \circ d = 0$ d is a differential

therefore $(\Lambda V, d)$ is a CDGA (general method to check ~~my~~ $d \circ d = 0$)

Let's check that $d_{DR} \circ m = m \circ d$

Since d_{DR}, d are (id, id) - derivation, $d_{DR} \circ m$ and $m \circ d$ are both (m, m) - derivation

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "m"] \arrow[d, "d"'] & v \arrow[d, "d"] \\ 0 \arrow[r, dashed, "m"] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} w \arrow[r, "m"] \arrow[d, "d"'] & y \arrow[d, "d"] \\ v^2 \arrow[r, "m"'] & v^2 \end{tikzcd}$$

Since $d_{DR} \circ m$ and $m \circ d$ coincide on the generators V

by unicity $d_{DR} \circ m = m \circ d$ (general méthod.) ∴

m is a morphism of CDGAs

Check that $H(m)$ is an isomorphisme sends base to base

II Sullivan models

def A relative Sullivan model (cofibration in the category of CDGA) is a morphism of CDGA of the form

$$
\begin{array}{ccc}
(B, d_B) & \hookrightarrow & (B \otimes \Lambda V, d) \\
b & \longmapsto & b \otimes 1
\end{array}
$$

such that the graded vector space V is the direct sum of graded vector spaces $V(k)$

$$V = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V(k)$$

such that

$$d_V : V(0) \longrightarrow B \otimes k$$
$$d_V : V(k) \longrightarrow B \otimes \Lambda V(<k)$$

Here $V(<k) := V(0) \oplus \quad \oplus V(k-1)$

def A relative Sullivan model is minimal if $d_V : V \longrightarrow B^+ \otimes \Lambda V \oplus B \otimes \Lambda^{\geq 2} V$

$$B = \underbrace{B^0}_{\text{degree } 0} \oplus \underbrace{B^+}_{\text{degree } >0}$$

$$\Lambda V = \mathbb{Q} \oplus V \oplus \underbrace{\Lambda^{\geq 2} V}_{\text{word length } \geq 2}$$

def A (minimal) Sullivan model is a (minimal) relative Sullivan model of the form

$$(B, d_B) = (\mathbb{Q}, 0) \hookrightarrow (\mathbb{Q} \otimes \Lambda V, d)$$

Exemple 5§12 Let $(\Lambda V, d)$ a CDGA such that $V = V^{\geq 2}$
rational Homotopy

and $d : V \longrightarrow \Lambda^{\geq 2} V$

then $(\Lambda V, d)$ is a Sullivan model (of course minimal)

proof Let $V(k) = V^{k}$

$$\begin{array}{ccc} V^{k} & & (\Lambda^{+}V \cdot \Lambda^{+}V)^{k+1} \subset \Lambda V^{<k} \\ \Psi & & \Psi \quad \Psi \\ d : v & \longmapsto & \sum x y_i \end{array}$$

$|x| + |y| = |x\,y| = k+1$

$|x| \geq 2$ donc $|y| < k$

def Let $\varphi : B \longrightarrow C$ a CDGA morphisme

A (minimal) relative Sullivan model of φ is a (minimal) relative Sullivan model $(B, d) \hookrightarrow (B \otimes \Lambda V, d)$

such that

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & \circlearrowleft & C \\ & B \otimes \Lambda V \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

$\simeq$ quasi-isomorphisme of CDGAs

def Let C be a CDGA

a (minimal) Sullivan model of C is a minimal Sullivan model $(\Lambda V, d)$ such there exists a quasi-isomor-
-phism of CDGAs

$$(\Lambda V, d) \xrightarrow{\ \simeq\ } C$$

Theorem minimal relative Sullivan models exists for any $\varphi : B \longrightarrow C$

Relative Sullivan model of $\Lambda v_1, 0 \otimes \Lambda v_2, 0 \xrightarrow{\text{multication}} \Lambda v, 0$ of Λv

$|v| = 2n+1$

$$\Lambda v_1, 0 \otimes \Lambda v_2, 0 \xrightarrow{\mu} \Lambda v, 0$$

$$v_1 \longmapsto v$$

$$v_2 \longmapsto v$$

$$v_2 - v_1 \longmapsto 0$$

μ is not a quasi-isomorphism

Denote by sv a element of degree $|sv| = |s| + |v|$
$= -1 + |v|$
$= 2n$

Define $d\,sv = v_2 - v_1$ Define $m(sv) = 0$

then

$$\begin{tikzcd} \Lambda v_1, 0 \otimes \Lambda v_2, 0 \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, hook] & & \Lambda v, 0 \\ & \Lambda(v_1, v_2, sv), d \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

m is a morphism of CDGAs

Let A be a dga.

definition $QA = \dfrac{A^+}{A^+ \cdot A^+}$ is the complex of indecomposables

$$
\begin{tikzcd}
Q\big(\Lambda(v_1, v_2, \delta v), d\big) \arrow[d, "Q(m)"] & = & Q v_1 \oplus Q v_2 \oplus Q \delta v, \quad \underset{v_2 - v_1}{\overset{d\delta v}{\shortparallel}} \arrow[d] \\
Q(\Lambda v, 0) & = & Q v, 0
\end{tikzcd}
$$

Check that $Q(m)$ is a quasi-isomorphism

FHT
Proposition 14.13 Since m is a morphism between Sullivan models,

$Q(m)$ quasi-iso $\Longrightarrow$ m is a quasi-iso

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda v_1, 0 \otimes \Lambda v_2, 0 \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dd] \arrow[dr, hook] & & \Lambda v, 0 \\
& \Lambda v_1, v_2, \delta v \arrow[ur, "\simeq"', "m"] \arrow[dd] & \\
\Lambda v, 0 \arrow[dr, hook] \arrow[rr, phantom, "\text{push out}"] & & \\
& \Lambda v, \delta v &
\end{tikzcd}
$$

$$\Lambda v, \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\delta v} \cong \Lambda v, 0 \otimes_{\Lambda v_1, 0 \otimes \Lambda v_2, 0} \Lambda v_1, v_2, \underset{\substack{\downarrow\\ v_2 - v_1}}{\delta v}$$

In fact, we have computed

$\Lambda v, \delta v, 0$ a Sullivan model of $\mathcal{L}(S^{2n+1})_{n \geq 1}$

$H^*(\mathcal{L} S^{2n+1}; Q) \cong \Lambda v, \delta v$. Check that $\forall p \in \mathbb{N}$ $\dim H^p(\mathcal{L} S^{2n+1}; Q) \leq 2$

III Rational Homotopy

Pour tout espace topologique X

$$S^*(X;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} D(X) \xleftarrow[A_{DR}(M)]{\simeq} A_{PL}(X)$$

Si $X = M$ prenez l'algèbre de de Rham et $\mathbb{R}$ commutative c'est pareil

quasi-isomorphisme naturel d'adg

FOT
2.34 def 2 espaces X et Y ont le même type d'homotopie rationnelle si il existe une suite finie d'applications

$$X \longrightarrow Y_1 \longleftarrow \qquad\qquad Y_n \longrightarrow Y$$

tq $H^*(X;\mathbb{Q}) \xleftarrow{\simeq} H^*(Y_1;\mathbb{Q}) \qquad H^*(Y_n;\mathbb{Q}) \xleftarrow{\simeq} H^*(Y,\mathbb{Q})$

2.35 FOT
Théorème Soient X et Y deux espaces topologiques simplement connexes

tq $H^n(X,\mathbb{Q})$ et $H^n(Y,\mathbb{Q})$ soient de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Soit ΛV un modèle minimale de Sullivan de X
ΛW Y

X et Y ont le même type d'homotopie rationnelle ssi ΛV est isomorphe à ΛW

IV Sullivan model of a pull-back

modèle de Sullivan d'un produit
= produit des modèles de Sullivan

$$\begin{tikzcd}
 & A_{PL}(Y) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "A_{PL}(p_2)"] & \\
A_{PL}(X) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "A_{PL}(p_1)"'] & A_{PL}(X)\otimes A_{PL}(Y) \arrow[dr, dashed, "\exists!\ \cong"] & \\
 & & A_{PL}(X\times Y)
\end{tikzcd}$$

Soit $\Lambda V \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$

$\Lambda W \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(Y)$

alors $\Lambda V \otimes \Lambda W \longrightarrow A_{PL}(X)\otimes A_{PL}(Y) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X\times Y)$

modèle de Sullivan de la diagonale
= multiplication du modèle de Sullivan

$$\begin{tikzcd}
 & A_{PL}(X) \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "A_{PL}(p_2)"] \arrow[ddr, bend left=60, "A_{PL}(p_2\circ\Delta)=id"] & \\
A_{PL}(X) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "A_{PL}(p_1)"'] \arrow[drr, bend right=50, "id"'] & A_{PL}(X)\otimes A_{PL}(X) \arrow[r, "\cong"] & A_{PL}(X\times X) \arrow[d, dashed, "\Delta"] \\
 & & A_{PL}(X)
\end{tikzcd}$$

donc

$$
\begin{tikzcd}
A_{PL}(X) & & A_{PL}(X \times X) \arrow[ll, "A_{PL}(\Delta)"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& & A_{PL}(X) \otimes A_{PL}(X) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[ull, "\mu"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
\Lambda V \arrow[uu] & & \Lambda V \otimes \Lambda V \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[ll, "\mu"]
\end{tikzcd}
$$

modele de Sullivan d'un produit fibré

Soit

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, two heads, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\
X \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

E connexe par arcs

donc p' fibration

p fibration de Serre

B, X 1-connexe

un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
A(P) & & & A(E) \arrow[lll, bend right] \\
& A(X)\otimes_{A(B)}(A(B)\otimes\Lambda V) \arrow[ul, dashed, "\exists!\, m'"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & A(B)\otimes\Lambda V \arrow[l] \arrow[ur, "m", "\simeq"'] & \\
& A(X) \arrow[u] \arrow[uul, bend left] & A(B) \arrow[l] \arrow[u, "\text{modele relatif de Sullivan}"'] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

morphisme d'algèbre

donc modele relatif de Sullivan

somme amalgamée

Explicitement $m'(x\otimes e) = A(p')\cdot A(f')\circ m(e)$

pour $x \in A(X)$ et $e \in A(B)\otimes\Lambda V$

Theorem m' est un quasi-isomorphisme.

Preuve idée

$$H_*\left(A(X) \otimes_{A(B)} \left(A(B) \otimes \Lambda V\right)\right) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Tor}^{A(B)}\left(A(X), A(E)\right)$$

$$\cong \mathrm{Tor}^{S^*(B)}\left(S^*(X), S^*(E)\right) \cong H^*(F)$$

car $S^*(X) \xrightarrow{\simeq} D(X) \xleftarrow{\simeq} A(X)$ naturalité de

Formule d'Eilenberg-Moore

au lieu de travailler avec A_{PL}, je travaille avec les modèles de Sullivan.

Cas particulier modèle de Sullivan d'une fibration

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d, two heads] \\
* \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

fibration de Serre

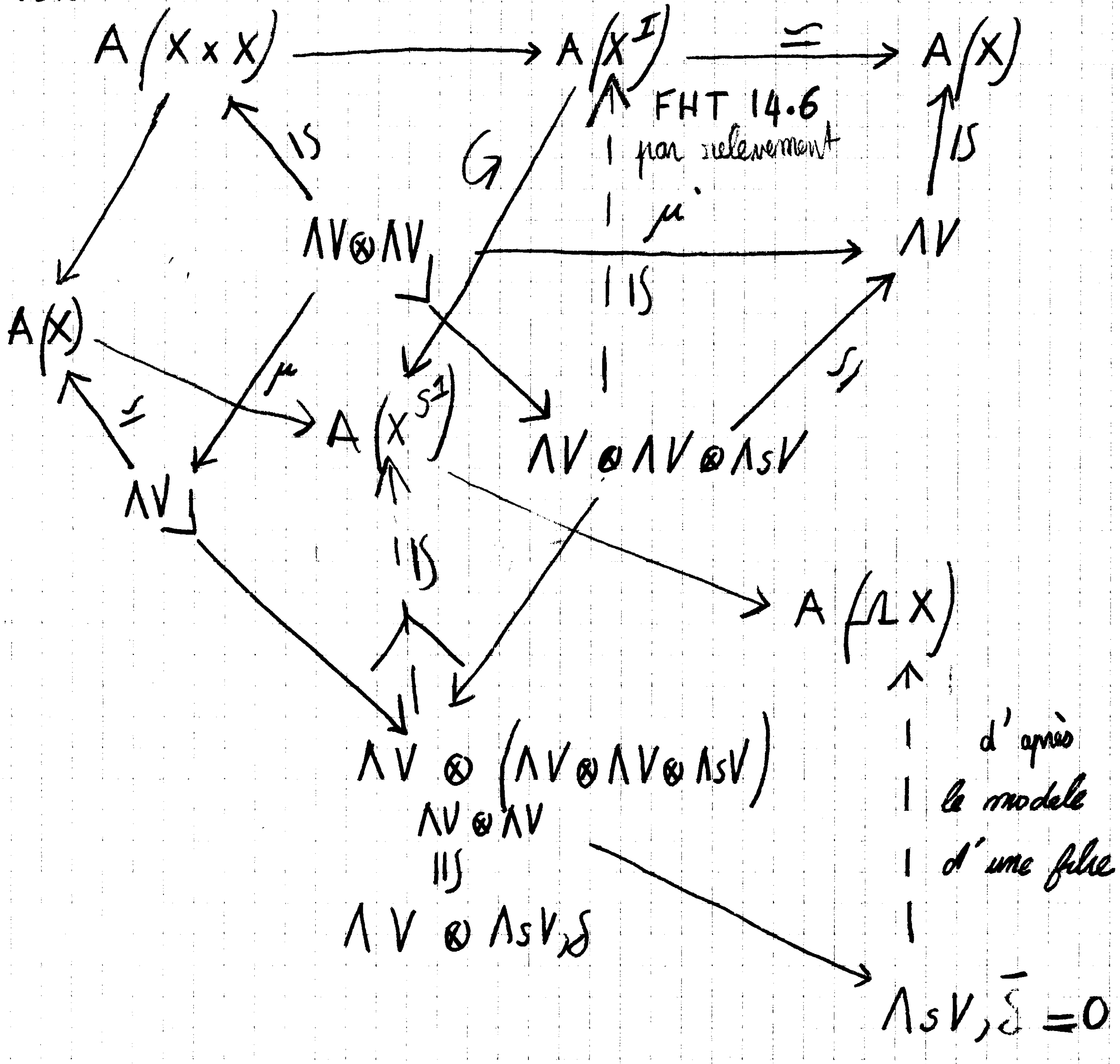
$$\begin{tikzcd}
A(B) \arrow[r] & A(E) \arrow[r] & A_{PL}(B) \\
(\Lambda V, d) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r] & (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] & k \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

$$(\Lambda W, \bar{d}) \cong k \otimes_{\Lambda V} (\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$$

Cas particulier les lacets libres

$$\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, hook] & \Omega X \arrow[d, hook] & \\
X^{S^1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X^{[0,1]} \arrow[d, "{(ev_0, ev_1)}"] & X \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[dl, "\Delta"] \\
X \arrow[r] & X \times X &
\end{tikzcd}$$

donc



donc $H_*(\mathcal{L}X;\mathbb{Q}) \underset{\text{algebre}}{\cong} H(\wedge V \otimes \wedge sV, \delta) \cong HH_*(\wedge V, \wedge V)$

$\cong HH_*(A_{PL}(X), A_{PL}(X))$

Theorem Soit X un espace simplement connexe.

Soit $(\Lambda V, d)$ un modele minimal de Sullivan

Soit $s : \Lambda V \otimes \Lambda sV \longrightarrow \Lambda V \otimes \Lambda sV$

l'unique derivation telle que sur les generateurs

$\forall v \in V \quad s v = sv$

$\forall sv \in V \quad s sv = 0$

s de degree en haut -1, $s^2 = 0$

Alors $(\Lambda V \otimes \Lambda sV, \delta)$ est un modèle de Sullivan de X^{S^1}

$$\delta s + s \delta = 0 \text{ sur } \Lambda V \otimes \Lambda sV$$

Lemme 5 rational BV-algebra in string topology Félix Thomas

Δ modele rationnel du bord de Connes sur $\Lambda V \otimes \Lambda sV$

Proposition 5.14 Felix - Oprea - Tanré
Theorem Sullivan - Vigué p 9

Soit M un espace simplement connexe tq $H^*(M; \mathbb{Q})$ soit de dimension totale finie
Alors

L'algèbre de cohomologie $H^*(M; \mathbb{Q})$ nécessite au moins 2 générateurs
$\Longrightarrow$ La suite $b_n = \dim H^n(\mathcal{L}M; \mathbb{Q})$ n'est pas bornée

Conjecture : vrai si on remplace $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{F}_p$

En fait, théorème complètement algébrique

Theorem III p 315

Theorem Sullivan - Vigué $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ Halperin - Vigué $\mathbb{F}$ corps commutatif

Soit A une algèbre graduée différentielle commutative
tq $H^{<0}(A) = 0$ $H^0(A) = \mathbb{F}$ $H^1(A) = 0$
et $H^*(A)$ de dimension finie

L'algèbre $H^*(A)$ nécessite au moins 2 générateurs
$\Longrightarrow$ La suite $b_n = \dim HH_{-n}(A, A)$
Homologie de Hochschild n'est pas bornée

Sullivan - Vigué p 9 The homology theory of the closed geodesic problem

Soit $(\Lambda V, d)$ le modèle minimal d'un espace

tq $\dim V^{impair} \geq 1$

Soit $x_1, x_2, \quad , x_m, y, x_{m+1}, \dots$

une base de V ordonnée par degrés

y étant le premier générateur de degré impair ($n \geq 0$!)

$\forall 1 \leq i \leq m \quad dx_i \in \Lambda x_{<i}$ concentré en degrés pair impair

donc $dx_i = 0$

$dy \in \Lambda x_{\leq m}$ donc $dy = P_1(x_1, \quad, x_m) \in \Lambda^{\geq 2}(x_1, \quad, x_m)$

Considérons le modèle des lacets libres

$$(\Lambda V, d) \hookrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda sV, d) \longrightarrow (\Lambda sV, 0)$$

$$d sx_i = -s dx_i = 0$$

$$d sy = -s dy \in \Lambda^{\geq 1} x_1, \quad, x_m \otimes \Lambda^1 sx_1, \quad, sx_m$$

donc $d(sx_1 \quad sx_m \, sy) = sx_1 \quad sx_m \, dsy_1 = 0$

donc $d(sx_1 \quad sx_m \, sy^p) = sx_1 \quad sx_m \, p \, dsy (sy)^{p-1} = 0$

donc $sx_1 \quad sx_m \, sy^p$ sont des cocycles

$$\Lambda V \otimes \Lambda sV, d \longrightarrow \Lambda sV, 0$$

$$sx_1 \quad sx_m \, sy^p \longmapsto sx_1 \quad sx_m \, sy^p \neq 0$$

donc $sz_1 \ldots sz_n \; sy_n{}^p$ donne des classes de

cohomologie non nulle dans $H(\Lambda V \otimes \Lambda sV, d)$

donc $H_n(X^{S^1})$ n'est pas nulle.

quand n tends vers $+\infty$

resultat de $[S_1]$ Sullivan D. 1973

Si $H_*(X)$ est nul pour n assez grand

et si $H_*(X)$ est distinct de $\mathbb{Q}$

alors forcement son modele minimal

comporte un generateur de degree impair

Bilan

Soit X un espace 1-connexe tq $H_*(X;\mathbb{Q}) \not\equiv \mathbb{Q}$ et $H_n(X;\mathbb{Q})$ est nulle pour n assez grand alors $H_n(\mathcal{L}X;\mathbb{Q})$ n'est pas nulle quand $n \longrightarrow +\infty$

Soit $(\Lambda V, d)$ le modele minimal d'un espace X
tq $H^*(X)$ est de dimension finie
et l'algèbre $H^*(X)$ necessite au moins
2 generateurs
alors $\dim V^{odd} \geq 2$

Preuve de Felix - Oprea - Tanré (2) $\Rightarrow$ (3) p 214

Si il n'y a pas de generateur de degree impair
alors V est concentre en degree pair
donc $d = 0$ donc $H^*(\Lambda V, d)$ est
de dimension infini où $H^*(\Lambda V) = \mathbb{Q}$
donc il y a au moins un generateur y de degree
impair. Supposons qu'il n'y en a qu'un seul
$$(\Lambda V, d) = \Lambda(x_1, x_2, \quad , x_m, y, x_{m+1}, \dots\dots)$$
Si $dy = 0$ $\quad dx_1 = 0$ si $m \geq 1$
$\quad dx_1 \in \Lambda^{\geq 2} y = 0$ si $m = 0$
donc $dx_1 = 0$
Si x_1^n est un cobord $x_1^n = d(y P(x_1, \dots,))$
$= y\, d\, P(x_1, \dots\dots)$ impossible car $x_1^n \in$ idéal engendré
par y donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $[x_1^n] \neq 0$ dans $H^*(X)$
donc $H^*(X)$ est de dimension infinie

donc $dy \neq 0$ donc $m \geqslant 1$.

Soit A une algèbre graduée sans différentielle

Soit $z \in$ centre de A qui n'est pas un diviseur de zéro, de degré pair

Alors $$A \otimes E\, sz,\ d\,sz = z \xrightarrow{\ \simeq\ } A/z.A$$

Preuve · Voir classeur rouge complexe de Koszul

$$d(a \otimes sz) = (-1)^{|a|}\, a.z \qquad d(a \otimes 1) = 0$$

$$0 \longrightarrow A \otimes sz \xrightarrow[\text{injectif}]{\cdot z} A \longrightarrow 0$$

$$\operatorname{Ker} d = A \otimes k \qquad \operatorname{Im} d = z.A \otimes k$$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(x_1, \dots, x_m, 0)/(dy) \arrow[r, tail] & \Lambda(x_1, \dots, x_m) \otimes \Lambda(x_{m+1}, \dots)/(dy),\ \bar{d} \\
\Lambda(x_1, 0, \dots, x_m, 0, y) \arrow[u, two heads, "\simeq"] \arrow[r, tail] & \Lambda(x_1, \dots, x_m, y, x_{m+1}, \dots) \arrow[u, two heads, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

concentré en degré pair donc $\bar{d} = 0$

comme $dy \neq 0$ is a non zero polynomial ~~est de degré pair~~ ce n'est pas un diviseur de zéro

$y \mapsto dy$ modèle relatif de Sullivan

Si $m \geqslant 2$ $\dim \Lambda(x_1, \dots, x_m)/(dy) = \dim \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]/$ idéal engendré par un polynôme $\neq 0$

est de dimension infinie

Si $m = 1$ Comme $\Lambda x_1 / (dy)$

est engendré par un seul générateur

on doit avoir un deuxième générateur x_2

mais $\Lambda x_1 / (dy) \otimes \Lambda x_2$,

est de dimension infinie

Proposition 4 Vigué - Sullivan

Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif quelconque

Soit A une algèbre graduée différentielle tel que la multiplication par un cocycle x de degré quelconque $A \longrightarrow A$, $a \longmapsto xa$ soit injectif Ex $A = (\Lambda V, d)$ $x \in V$ cocycle de degré pair

alors si les nombres de Betti de $H(A)$ sont bornées alors les nombres de Betti de $H(A/_{xA})$ sont aussi bornées

$$0 \longrightarrow x\Lambda V \hookrightarrow \Lambda V \longrightarrow \Lambda V/_{x\Lambda V} \longrightarrow 0$$

courte suite exacte de complexes

d'où une longue suite exacte en homologie

$$\longrightarrow H^n(x\Lambda V) \longrightarrow H^n(\Lambda V) \longrightarrow H^n(\Lambda V/_{x\Lambda V}) \longrightarrow$$

$$H^n(x\Lambda V) \cong H^{n-|x|}(\Lambda V) \xrightarrow{[x]\cdot} H^n(\Lambda V)$$

$$\longrightarrow H^{n+1}(x\Lambda V) \cong H^{n+1-|x|}(\Lambda V)$$

d'où une courte suite exacte

$$0 \to \frac{H^n(\Lambda V)}{[x]H^{n-x}(\Lambda V)} \longrightarrow H^n(\Lambda V/_{x\Lambda V}) \longrightarrow \operatorname{Ann} x[x] \text{ dans } H^{n+1-|x|}(\Lambda V) \longrightarrow 0$$

donc

$$\dim H^n(\Lambda V/_{x\Lambda V}) \leqslant \dim H^n(\Lambda V) + \dim H^{n+1-|x|}(\Lambda V)$$

droit

donc si les nombres de Betti de $H^*(\Lambda V)$ sont bornées alors les nombres de Betti de $H^*(\Lambda V/_{x\Lambda V})$ sont bornées on sait donc que $\dim V^{\text{impair}} \geq 2$.

Soit $x_1, x_2, \quad , x_m, y, x_{m+1}, \quad , x_n, \underset{\underset{x_{n+1}}{\parallel}}{\jmath}, \ldots\ldots$

une base de V ordonnées par degrées

y étant le premier generateur de degree impair

Considerons le modele des lacets libres

$$(\Lambda V \otimes \Lambda sV, \delta)$$

$$\forall\ 1 \leq j \leq n+1 \quad \underset{\delta x_j}{d x_j} \in \Lambda^{\geq 2}(x_{<j}, y) \subset \Lambda^{\geq 1} x_{<j} \otimes \Lambda y$$

car $\Lambda^{\geq 2} y = 0$

donc l'ideal J engendre de $\Lambda V \otimes \Lambda sV$ par les $x_1, \quad , x_n$ est stable par δ

Considerons l'algèbre gradué differentielle $\left(\Lambda V \otimes \Lambda sV, \delta / J\right)$

$$\cong \left(\Lambda(y, \jmath, \ldots) \otimes \Lambda sV, \bar{\delta}\right)$$

$$s : \Lambda^{\geq 1} x_{<j} \otimes \Lambda y \longrightarrow \Lambda^{\geq 0} x_{<j} \otimes \Lambda^1 s x_{<j} \otimes \Lambda y$$
$$+ \Lambda^{\geq 1} x_{<j} \otimes \Lambda y \otimes \Lambda sy$$

donc $\quad \delta s x_j = -s d x_j \in$ ideal engendré par les $s x_{<j}$ et par les $x_{<j}$

donc comme $(\partial x_i)^2 = 0$

$\forall\, 1 \leq j \leq n+1 \quad \partial x_1 \quad \partial x_{j-1} \; \bar\delta \partial x_j = 0$

Par récurrence $\bar\delta(\partial x_1 \wedge \quad \wedge \partial x_n) = 0$

$j = n+1 \quad \partial x_1 \quad \partial x_n \; \bar\delta \partial \bar y = 0$

De même comme $dy \in \Lambda^{\geq 2}_{x \leq n}$

$\partial x_1 \quad \partial x_n \; \bar\delta \partial y = 0$

donc $\bar\delta\left(\partial x_1 \quad \partial x_n \left(\partial y\right)^p \left(\partial \bar y\right)^q\right)$

$= \partial x_1 \quad \partial x_n \times \left(p\, \bar\delta \partial y\, (\partial y)^{p-1} (\partial \bar y)^q + (\partial y)^p q\, \bar\delta \partial \bar y\, (\partial \bar y)^{q-1}\right)$

$= 0$

$$\Lambda(x_1, \ldots x_m, y, x_{m+1}, \ldots, x_n, z, \ldots) \otimes \Lambda sV$$

$$\| $$

$\underset{\text{pair}}{\Lambda x_1}, 0 \longrightarrow \Lambda V \otimes \Lambda sV$ Supposons que les nombres de Betti sont bornés

$\Downarrow$ Proposition 4

$\underset{\text{pair}}{\Lambda x_2}, 0 \longrightarrow \Lambda(x_2, \ldots \quad) \otimes \Lambda sV$ Les nombres de Betti sont bornés

$$\downarrow$$

$\underset{\text{pair}}{\Lambda x_m}, 0 \longrightarrow \Lambda(x_m, y, \quad x_n, z, \ldots) \otimes \Lambda sV$

$$\downarrow$$

$\underset{\text{pair}}{\Lambda x_{m+1}}, 0 \longrightarrow \Lambda(y, x_{m+1}, \quad) \otimes \Lambda sV$

$\ldots \delta x_{m+1} \in$ idéal engendré par les $x < m$

$\underset{\text{pair}}{\Lambda x_n}, 0 \longrightarrow \Lambda(y, x_n, z) \otimes \Lambda sV$

$\Downarrow$ Proposition 4

$\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n (\Delta y)^p (\Delta z)^q \Lambda(y, z, \ldots) \otimes \Lambda sV$ Les nombres de Betti sont bornés

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$\Delta x_1 \Delta x_2 \quad \Delta x_n (\Delta y)^p (\Delta z)^q \Lambda sV, 0$

famille libre de $H^*(\Lambda sV, 0) \cong H^*(\Lambda M; \mathbb{Q})$

donc $\Delta x_1 \quad \Delta x_n \, \Delta y^p \, \Delta y^q$ donne des classes de cohomologie linéairement indépendantes dans

$$H^*\left(\Lambda y, \mathcal{Y}, \ldots \otimes \Lambda s V, \bar{\delta}\right)$$

donc les nombres de Betti de $H^*\left(\Lambda y, \mathcal{Y}, \ldots \otimes \Lambda s V, \bar{\delta}\right)$ ne sont pas bornés.

there is at least k elements $\Delta x_1 \ \ \Delta x_n \ \Delta y^p \Delta z^q$

in degree $|\Delta x_1| + \ \ + |\Delta x_n| + k$ PPCM de $|\Delta y|$ et de $|\Delta z|$

Rewe $\forall\, 0 \leq i \leq k$

$$p = i \ \frac{\text{PPCM de } |\Delta y| \text{ et de } |\Delta z|}{|\Delta y|}$$

$$q = (k - i) \ \frac{\text{PPCM de } |\Delta y| \text{ et de } |\Delta z|}{|\Delta z|}$$