Corrigé CC du 2 Mai 2019

Exercice 1 $\quad e^{x^2} = e^{3\times 4 - x}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 12 - x \quad$ en prenant le log

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 12 = 0$

$\Delta = 1 - 4\times(-12) = 49$

$x = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = \dfrac{-8}{2}$ ou $\dfrac{6}{2} = -4$ ou 3

Les solutions sont $x = 3$ ou $x = -4$.

Exercice 2

1. $f'(x) = (2x-3)'\sqrt{x} + (2x-3)(\sqrt{x})'$
$= 2\sqrt{x} + (2x-3)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $g'(x) = (-3x+\pi)' \times -\sin(-3x+\pi)$
$= 3\sin(-3x+\pi)$

Exercice 3

1. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{x^5}{5} - \cancel{4}\frac{x^4}{\cancel{4}} - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^2 + 2x + C$

où C constante.

2. $\displaystyle\int g(x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3-1)$

car $(\cos(x^3-1))' = 3x^2\times(-\sin(x^3-1)) = -3x^2\sin(x^2-1)$

Exercice 4

$$(x^2+4)y' + xy = 0$$

$$y' + \frac{x}{x^2+4}\, y = 0$$

$$y'/y = -\frac{x}{x^2+4} \qquad \ln y = -\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$$

$$\text{car } \left[\ln(x^2+4)\right]' = \frac{2x}{x^2+4}$$

$$\ln y = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

Les solutions sont les fonctions sur $\mathbb{R}$

de la forme $y(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+4}}$ où C constante réelle

Exercice 5

1. $r^2 - 4r + 3 = 0 \qquad r = 1$ ou $r = 3$

Les solutions sont donc de la forme $C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

2. 1ère méthode $y(x) = (ax+b)e^{-x}$

$$y'(x) = a e^{-x} + (ax+b)(-e^{-x})$$

$$= (-ax + a - b)e^{-x}$$

$$y''(x) = -a e^{-x} + (-ax+a-b)(-e^{-x})$$

$$= (ax + b - 2a)e^{-x}$$

$$y'' - 4y' + 3y = (ax+b-2a+4ax-4a+4b+3ax+3b)e^{-x}$$

$$= (8ax + 8b - 6a)e^{-x} \text{ est égal à } (2x+1)e^{-x}$$

si $\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/4 \\ 8b - 6/4 = 1 \end{cases} \quad 8b = \frac{5}{2} \quad b = \frac{5}{16}$

Une solution particulière est donnée par

$$y(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-x}$$

$2^{ème}$ méthode

On pose $y = Z\, e^{-x}$

$$y' = (Z' - Z)\, e^{-x}$$

$$y'' = (Z'' - Z' - Z' + Z)\, e^{-x} = (Z'' - 2Z' + Z)\, e^{-x}$$

$$y'' - 4y' + 3y = (Z'' - 2Z' + Z - 4Z' + 4Z + 3Z)\, e^{-x}$$

$= (Z'' - 6Z' + 8Z)\, e^{-x}$ est égal à $(2x+1)\, e^{-x}$

ssi $\quad Z'' - 6Z' + 8Z = 2x + 1$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$Z = ax + b$$

$$Z' = a$$

$$Z'' = 0$$

$Z'' - 6Z' + 8Z = -6a + 8(ax+b) = 8ax + 8b - 6a$

est égal à $2x + 1$

ssi $\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases}$

3. Les solutions de (E) sont de la forme

$$C_1\, e^{+x} + C_2\, e^{3x} + \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-x}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles